UC-NRLF
B 4 593 584

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS

II

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner das **Archiv für Rassen- und Gesellschafts-Biologie**, die **Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen**, die **Geographische Zeitschrift**, **Himmel und Erde**, illustrierte naturwissenschaftliche Monatsschrift u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt. Das ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften“** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908 steht Interessenten umsonst und postfrei zur Verfügung.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**

N. F. Moyer
Dec 1909.

GIFT OF
the estate of
Professor William F. Meyer

SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS
ASTRONOMY LIBRARY

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

HEFT II.

DURCHFÜHRUNG DER THEORIE IM FALLE DES SCHWEREN SYMMETRISCHEN KREISELS.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Astronomy
add to cat

Anzeige von Heft II der Kreiseltheorie

(aus den Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig).

Als Fortsetzung des im Sommer 1897 erschienen ersten Heftes der Kreiseltheorie, welches die allgemeinen kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie auseinanderzulegen hatte, folgt jetzt das zweite Heft. Dieses stellt sich vor allem die Aufgabe, die Bewegung des symmetrischen Kreisels unter dem Einflufs der Schwere bei festem Stützpunkte in allen ihren Details zu diskutieren. Einige anschliefsende Probleme, die Bewegung des allgemeinen Kreisels unter dem Einflufs der Schwere und die Poinsot-Bewegung, d. h. die Bewegung des kräftefreien Kreisels bei allgemeiner Massenverteilung, sind mehr gestreift und zum Vergleich herangezogen als erschöpfend behandelt.

Nur bei der Besprechung der die Stabilität der Bewegungen betreffenden Fragen wurde der Darstellung eine etwas breitere Basis gegeben, weil die hiermit sich befassende und gerade im Werden begriffene Theorie heutzutage ein besonderes Interesse beanspruchen darf. In diesem Teile wurden nämlich die Definitionen und Formulierungen hinreichend allgemein gehalten, um beliebige mechanische Systeme zu umfassen. Der Kreisel erscheint hier nur als ein besonders instruktives Beispiel oder, wenn man will, als ein „ideenbildendes Moment". Übrigens ist der Begriff von der Stabilität der Bewegung hier wesentlich anders gefafst, wie in den einschlägigen Lehrbüchern (von Thomson und Tait oder Routh), natürlich aber so, dafs sich darunter der allgemein acceptierte Begriff von der Stabilität des Gleichgewichtes subsumiert.

Was nun den eigentlichen Gegenstand des vorliegenden Heftes, die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels angeht, so wurde eine möglichst allseitige Behandlung des Problems angestrebt. Die Darstellung begnügt sich daher nicht mit der Ermittelung der allgemeinen formellen Behandlung des Problems, sondern sie sucht auch — im Sinne der in der Einleitung auseinandergesetzten Prinzipien — das volle geometrische und mechanische Verständnis der Bewegung anzubahnen, welches ohne Frage einen nicht minder wichtigen Zielpunkt bei der Behandlung eines mechanischen Problems bildet, wie die analytische Beherrschung des Gegenstandes.

Aus diesem Grunde hebt Kap. IV mit einer qualitativen Beschreibung der Bahnkurve der Kreiselspitze an, welche erst später durch eine genaue

Meyer Gift

QA862
T7K6
v.2

quantitative Diskussion der Bewegungen kontrolliert wird. Auch die Integration der Differentialgleichungen wird zunächst auf geometrischem Wege bewerkstelligt, wobei sich gewisse bekannte erste Integrale der Bewegung als einfache Eigenschaften des Impulsvektors herausstellen. Von demselben Gesichtspunkte aus wird auch die fraglos beste analytische Methode zur Berechnung der Kreiselbewegung, ihre Darstellung durch elliptische Funktionen bis zum letzten Kapitel dieses Heftes zurückgeschoben zu Gunsten der Darstellung durch elliptische Integrale, welche zwar weniger vollkommen ist, dafür aber der geometrischen Anschauung und der mechanischen Interpretation zunächst näher liegen dürfte, wie jene.

Andrerseits war es erforderlich, wenn wirklich von einer vollständigen Behandlung des Problems die Rede sein konnte, die analytischen Entwickelungen bis zur wirklichen numerischen Berechnung der Kreiselbewegungen durchzuführen. Den Schlufs des vierten Kapitels bildet daher eine Anleitung zur numerischen Berechnung auf Grund der Legendreschen Integraltafeln, sowie eine Methode zur Ableitung von Näherungsformeln, durch welche man, gerade in den praktisch wichtigsten Fällen, die exakten Formeln ersetzen kann. Im Kapitel VI wird die Frage der numerischen Berechnung noch einmal aufgenommen und mit Hülfe der ϑ-Reihen auf die befriedigendste Weise (bis zur Abschätzung der Fehlergrenze incl.) beantwortet.

Kapitel V behandelt in der Hauptsache einige besondere und besonders markante Bewegungstypen. Hervorzuheben sind namentlich zwei Bewegungen, welche als pseudoreguläre Präcession und als aufrechte Kreiselbewegung bezeichnet werden.

Unter der pseudoregulären Präcession wird jene Bewegung verstanden, welche unter den gewöhnlichen experimentellen Bedingungen bei hinreichend grofser Eigenrotation in der Regel Platz greift und welche sich von der wirklichen regulären Präcession, äufserlich betrachtet, kaum unterscheidet. Das Paradoxe, welches dieser Bewegung anhaftet, wird ausführlich diskutiert und auf eine Ungenauigkeit in der Beobachtung zurückgeführt. Da die meisten populären Erklärungsversuche der Kreiselbewegung gerade die hierher gehörigen Erscheinungen als die praktisch wichtigsten im Auge haben, so folgt hier eine kurze Zusammenstellung und Kritik der populären Kreisellitteratur.

Unter der aufrechten Kreiselbewegung wird sodann die gleichförmige Rotation um die vertikal gestellte Figurenaxe verstanden. Dieselbe ist bekanntlich bei hinreichend grofser Rotationsgeschwindigkeit stabil, bei geringerer Geschwindigkeit labil (wobei noch erst zu diskutieren ist, was unter diesem Wort verstanden sein soll). Unter denjenigen

M577195

Bewegungen, welche sich durch Störung des labilen Bewegungszustandes ergeben, kommt ein Fall asymptotischer Bewegung vor, welcher im Hinblick auf die anschliefsenden allgemeinen Stabilitätsbetrachtungen von besonderer Wichtigkeit ist.

Bei der Darstellung der Bewegung durch elliptische Funktionen in Kapitel VI tritt die fundamentale Bedeutung, welche die bereits in Kapitel I eingeführten Drehungsparameter α, β, γ, δ für die Formulierung der Schlufsresultate besitzen, in ihr volles Licht. In diesen Parametern wird die Darstellung der Bewegung so einfach und übersichtlich, wie nur irgend möglich.

Übrigens werden alle erforderlichen Entwickelungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen mit einiger Vollständigkeit in dem Buche selbst reproduziert, so dafs die bezüglichen Teile der Darstellung geradezu als eine Einleitung in diese Theorie angesehen werden können. Es scheint unter didaktischen Gesichtspunkten nicht unrichtig, eine solche Einleitung, wie es hier geschehen, an ein spezielles Beispiel anzuknüpfen. Von anderen Darstellungen unterscheidet sich die vorliegende dadurch, dafs durch ausführliches Heranziehen der geometrischen Beziehungen der Zusammenhang des Ganzen besonders deutlich herausgearbeitet ist.

Von eigenartigem Interesse dürfte der Schlufsparagraph dieses Heftes sein. Hier wird das Integrationsproblem der Kreiselbewegung noch einmal aufgenommen und zwar auf Grund der mit den Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst gebildeten allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen. Es zeigt sich, dafs diese Gleichungen sogenannte Hermite-Lamésche Differentialgleichungen sind und dafs ihre Integrale in der Form von elliptischen Funktionen ohne irgend nennenswerte Zwischenrechnungen direkt hingeschrieben werden können. Gleichzeitig ergiebt sich noch aus der Form dieser Gleichungen die merkwürdige Thatsache, dafs die Kreiselbewegung identificiert werden kann mit der Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen.

Nachdem somit die reine Theorie der Kreiselbewegung zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, wird in dem dritten und letzten Heft des Buches zu zeigen sein, inwieweit sich diese Theorie mit der Erfahrung deckt, bez. welche Modifikationen daran angebracht werden müssen, damit sie auf eine Reihe von Thatsachen aus der Physik und Astronomie angewandt werden kann. Ferner sollen in jenem dritten Hefte die an dem speziellen Beispiele gewonnenen Gesichtspunkte für die Auffassung der allgemeinen Mechanik verwertet und endlich einzelne Streifzüge in das Gebiet der modernen theoretischen Physik unternommen werden.

Kapitel IV.

Die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Einführung der elliptischen Integrale.

§ 1. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; vorläufige Verabredungen.

In diesem Kapitel wenden wir uns zur definitiven Behandlung des *schweren* symmetrischen Kreisels von drei Graden der Freiheit, setzen also durchweg voraus, dafs der Schwerpunkt von dem Unterstützungspunkte verschieden ist.

Wir haben bisher nur einen ganz speziellen Fall der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels untersucht, nämlich die reguläre Präcession desselben (vgl. § 6 des vorigen Kap.). Demgegenüber soll es sich jetzt um seine allgemeine Bewegung (bei beliebiger Wahl des Anfangszustandes) handeln. Bevor wir aber in die etwas weitläufigen *quantitativen* Diskussionen eintreten, welche vollständig nur mit Hülfe der elliptischen Integrale durchgeführt werden können, wollen wir unsere Aufgabe zunächst *qualitativ* fassen und auf anschaulichem Wege einen ersten Überblick über die zu erwartenden Bewegungsformen zu gewinnen suchen. Ein entsprechendes Verfahren wird stets, zumal bei komplizierteren Aufgaben der Mechanik geboten sein, weil man im anderen Falle Gefahr läuft, sich in Einzelheiten zu verlieren und über den Formeln den Gegenstand selbst zu vergessen.*)

Zunächst treffen wir einige vereinfachende Verabredungen.

1. Wir beziehen uns im Folgenden stets auf den *Kugelkreisel*. Dies wird umsomehr gestattet sein, als wir bald lernen werden, die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels auf die des schweren Kugelkreisels zurückzuführen. Dafs es überhaupt schwere Kugelkreisel giebt, d. h. Körper von kugelförmigem Trägheitsellipsoid, deren Schwerpunkt von dem Mittelpunkte der Trägheitskugel verschieden

*) Vgl. hierzu die beachtenswerten Bemerkungen, welche Herr Poincaré seinen wichtigen „qualitativen“ Untersuchungen über Differentialgleichungen, Journal de Liouville, sér. III t. 7 und 8, 1881, 1882 voranschickt.

ist, wurde bereits pag. 106 durch ein Beispiel erläutert. Den gemeinsamen Wert der Trägheitsmomente unseres Kreisels bezeichnen wir mit A.

2. Wir werden annehmen, dafs bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe der Schwerpunkt S *unterhalb des Unterstützungspunktes* O liegt ($P < 0$). Offenbar bedeutet diese Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil wir es ja in der Hand haben, den einen oder den anderen der beiden Halbstrahlen, in welche die Gerade OS durch den Punkt O zerlegt wird, als Figurenaxe zu bezeichnen.

3. Wir müssen uns ferner entscheiden, auf welche Elemente der Kreiselbewegung wir im Folgenden unser Hauptaugenmerk richten wollen. Nach der Poinsotschen Theorie der Drehung hätten wir uns in erster Linie den Ort des Drehungsvektors im Körper und im Raume klar zu machen. Die Gestalt der Polhodie- und der Herpolhodiekurve würde uns alsdann ein vollständiges Bild der Bewegung liefern. Indessen ist es nicht leicht, sich das Abrollen dieser Kurven deutlich zu vergegenwärtigen; aufserdem ist im Experimente der Ort der Drehungsaxe schwer sichtbar und überhaupt nur durch besondere Vorrichtungen (vgl. p. 14) zur Wahrnehmung zu bringen. Viel sinnfälliger ist bei der üblichen Konstruktion unserer Modelle der Ort der Figurenaxe im Raume. Infolgedessen werden wir statt nach Polhodie- und Herpolhodiekurve lieber nach der Kurve fragen, welche irgend ein Punkt der Figurenaxe, z. B. derjenige, welcher von O den Abstand 1 hat, bei der Bewegung beschreibt. Indem wir uns vorstellen, dafs der mit Masse belegte Teil der Figurenaxe (vgl. etwa die Figur von pag. 1) gerade die Länge 1 hat, werden wir den genannten Punkt im Folgenden als Kreiselspitze bezeichnen. Die Kurve, welche diese „Kreiselspitze“ auf der um O beschriebenen Einheitskugel aufzeichnen würde, liefert uns alsdann ein für die Anschauung charakteristisches, wenn auch nicht ganz vollständiges Bild vom Ablauf der Bewegung; letzteres deshalb, weil ja unsere Kurve nur die Bewegung der Figurenaxe im Raume, nicht aber die Drehung des Kreisels um die Figurenaxe zum Ausdrucke bringt.

Um die Kurve der Kreiselspitze graphisch wiedergeben zu können, müssen wir die Einheitskugel, auf welcher sie verläuft, auf eine geeignete Zeichenebene projizieren. Als solche wählen wir die Äquatorebene der Kugel, d. h. die durch den Unterstützungspunkt gehende Horizontalebene. Was die Art der Projektion betrifft, so würde es vielleicht am nächsten liegen, eine orthogonale Parallelprojektion (kurz *„orthographische Projektion“* genannt) zu wählen, also die Kurve so zu zeichnen, wie sie einem von oben her aus unendlicher Entfernung auf die Kugel blickenden Beschauer erscheinen würde. Dies würde aber

gewisse Übelstände mit sich bringen, auf welche demnächst aufmerksam gemacht werden soll. Besser ist es, die *stereographische Projektion* anzuwenden, wobei wir den tiefsten Punkt der Kugel, den „Südpol", als Projektionszentrum benutzen werden. Die Zeichnung giebt dann dasjenige Bild wieder, welches ein im Südpol der Kugel befindliches Auge von der Kurve empfängt. Der Äquator der Kugel erscheint in der Zeichnung als Einheitskreis, dessen Mittelpunkt dem höchsten Punkte der Kugel, dem „Nordpol", dessen Inneres der „nördlichen Halbkugel" entspricht.

Sehr viel vollkommener als die genannte orthographische oder auch als die im Folgenden anzuwendende stereographische Projektion sind allerdings die *stereoskopischen Bilder* der Kreiselbewegung, welche die Herren Greenhill und Dewar*) publiziert haben. Hier werden zwei geeignete Zentralprojektionen der Bahnkurve hergestellt, welche, durch das Stereoskop betrachtet, den vollendeten Eindruck der sphärischen Kurve hervorrufen. Die lediglich typographische Schwierigkeit, von einer Raumkurve ein absolut adäquates Bild zu geben, wird hier also durch Hinzuziehung des Stereoskops in glücklichster Weise gelöst. Wir verzichten auf diese Wiedergabe der Bahnkurve nur deshalb, weil wir beim Leser den Besitz eines Stereoskops nicht voraussetzen wollen.

4. Wir können ferner ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unsere Aufgabe dadurch vereinfachen, dafs wir die *Anfangszeit*, von der aus wir die Bewegung des Kreisels verfolgen, passend auswählen. Die Anfangszeit soll immer so angenommen werden, dafs sich in ihr die Kreiselspitze an einem höchsten oder tiefsten Punkte ihrer Bahn befindet. Die Kurve der Kreiselspitze wird hiernach zu Anfang eine horizontal gerichtete Tangente besitzen, falls sie nicht im Besonderen eine vertikal gerichtete Spitze bildet. Gleichzeitig ist durch unsere Wahl der Anfangszeit die Anfangslage der instantanen Rotationsaxe präjudiziert. Die Rotations- und die mit ihr zusammenfallende Impulsaxe liegen alsdann nämlich ersichtlich in einer durch die Anfangslage der Figurenaxe gehenden Vertikalebene.

5. Der Anfangszustand sowie der Charakter der resultierenden Bewegung sind nun durch drei Daten wesentlich bedingt, durch die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, durch die Anfangsneigung des Impulsvektors gegen die Vertikale und durch die Länge dieses Vektors. Die sonst etwa in Betracht kommenden Daten z. B. das Azimuth, unter welchem die Figurenaxe von oben gesehen erscheint, sind unwesentlich und haben speziell auf die Gestalt der im

*) Proceedings of the London Math. Soc., Bd. 27, pag. 587 u. ff., 1896, Engineering, Bd. 64 pag. 311, 1897.

Folgenden zu entwerfenden Figuren keinen Einfluſs. Die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale messen wir, wie üblich, durch den Winkel ϑ; Lage und Länge des Impulsvektors sind bekannt, wenn wir etwa seine senkrechten Projektionen auf die Vertikale und auf die Figurenaxe angeben. Da wir die Komponenten des Impulsvektors im X, Y, Z-System mit L, M, N bezeichnen, wird die Projektion des Impulsvektors auf die Figurenaxe durch den Buchstaben N zu charakterisieren sein. Führen wir ferner für die Komponenten des Impulsvektors in dem x, y, z-Systeme, dessen z-Axe wie früher verabredet mit der Vertikalen zusammenfallen sollte, die entsprechenden Bezeichnungen l, m, n ein, so wird die Projektion des Impulsvektors auf die Vertikale mit dem Buchstaben n zu belegen sein. Die Impulskomponente N bestimmt die Geschwindigkeit r, mit welcher sich der Kreisel um seine eigene Axe dreht. Es soll daher N kurz als *Eigenimpuls*, die zugehörige Geschwindigkeitskomponente r als *Eigenrotation* bezeichnet werden. Andrerseits stellt die Impulskomponente n einen Drehstoſs von vertikaler Axe dar, welcher einem gewissen auf die Kreiselspitze ausgeübten und horizontal gerichteten gewöhnlichen Stoſse äquivalent ist. Durch diesen Stoſs wird die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Kreiselspitze in ihrer Anfangslage seitlich (d. h. in horizontaler Richtung) fortschreitet. Infolgedessen soll die Impulskomponente n kurz als *seitlicher Anstoſs* bezeichnet werden. Zusammenfassend können wir hiernach sagen: Der Charakter der allgemeinen Kreiselbewegung hängt wesentlich nur von drei Konstanten ab, nämlich von der anfänglichen Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, dem Eigenimpulse und dem seitlichen Anstoſs zu Beginn der Bewegung, d. h. von den Beträgen, welche die Gröſsen ϑ, N und n zur Zeit $t = 0$ besitzen. Es wird sich übrigens im dritten Paragraphen zeigen, daſs die Impulskomponenten n und N ihre Anfangswerte für den ganzen Verlauf der Bewegung beibehalten, so daſs wir statt von den „Anfangswerten“ der Gröſsen n und N schlechtweg von den „Konstanten“ n und N reden können, welchen Umstand wir uns zur Vereinfachung der Ausdrucksweise schon jetzt zu nutze machen werden.

6. Während wir der Konstanten n im Folgenden *alle möglichen Werte* erteilen, wollen wir die Konstante N in diesem Paragraph als *positiv* voraussetzen; wir wollen also annehmen, daſs die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Ferner wollen wir den Anfangswert des Winkels ϑ von vornherein in spezieller Weise festlegen. Wir bestimmen nämlich, daſs die Figurenaxe anfangs *horizontal* liegen, der Winkel ϑ also gleich $\frac{\pi}{2}$ sein solle. Die

Kurve der Kreiselspitze wird alsdann, von dem Äquator der Einheitskugel auslaufend, in diesem einen höchsten oder tiefsten Punkt besitzen. Inwieweit durch diese Festsetzungen $\left(N > 0 \text{ und } \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ die folgenden Betrachtungen spezialisiert werden, wird später auszuführen sein. —

Nach diesen Verabredungen werden wir so vorgehen, dafs wir alle möglichen Bewegungsformen unseres Kugelkreisels, welche sich bei beliebiger Wahl der Konstanten n und N ergeben, zwischen einige besonders einfache Spezialfälle einordnen und uns im übrigen einer Art Kontinuitätsprinzipes bedienen, welches wir so formulieren: *Bei stetiger Abänderung des Anfangszustandes (der Werte von n und N) wird sich auch die Bewegung des Kreisels stetig verändern; unstetige Übergänge, welche mechanisch gesprochen auf instabile Bewegungsformen hindeuten würden, werden wir fürs erste als ausgeschlossen ansehen.* Natürlich bedarf dieses Prinzip, sowie unsere ganze qualitative Schlufsweise einer genauen quantitativen Nachprüfung. In der That sollen die folgenden Betrachtungen nicht als absolut stringent, sondern nur als plausibel hingestellt werden; wir werden sie später nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen haben. Übrigens sind die Figuren, welche wir für die Kurve der Kreiselspitze geben, nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ richtig gezeichnet.

Die Gesamtheit der Fälle, welche wir zu überblicken haben, stellt, entsprechend den unendlich vielen Werten, welche wir den Konstanten N und n beilegen können, eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit dar. (Man vgl. hierzu das Schema in Figur 36 von pag. 215.) Wir müssen uns im Folgenden natürlich begnügen, aus dieser Mannigfaltigkeit eine Reihe einzelner charakteristischer Typen herauszuheben.

Betrachten wir zunächst die Spezialfälle, auf welche wir hindeuteten. Es sind dieses die *reguläre Präcession* einerseits und die *Pendelbewegung* andrerseits.

Nach pag. 178, 179 giebt es bei gegebener Massenverteilung des Kreisels, sowie bei gegebenen Werten des (konstanten) Winkels ϑ und der Geschwindigkeitskomponente μ zwei mögliche Werte der zugehörigen Geschwindigkeitskomponente ν, welche zu einer *regulären Präcession* Anlafs geben. Im Falle des Kugelkreisels sind diese Werte beide reell und werden durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\text{a)} \quad \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{b)} \quad \nu = \pm\infty.$$

Es ist leicht, zumal in dem vorliegenden Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, von den Präcessionskonstanten ν und μ zu unseren Impulskomponenten n und N

überzugehen. Die Gröfsen ν und μ bedeuten (vgl. z. B. die Figuren von pag. 48) die Parallelprojektionen des Drehungsvektors auf die Vertikale und die Figurenaxe. Steht nun die Figurenaxe auf der Vertikalen senkrecht, so sind diese Parallelprojektionen mit den bez. Normalprojektionen des Drehungsvektors, welche wir nach früherem mit ϱ und r zu bezeichnen haben, identisch. Aus ϱ und r berechnen sich aber bei unserem Kugelkreisel die Impulskomponenten n und N durch Multiplikation mit dem Werte des Trägheitsmomentes, welchen wir mit A bezeichnen. Wir haben also in a) und b) für ν und μ bez. einzutragen $\frac{n}{A}$ und $\frac{N}{A}$. Infolgedessen beträgt die Gröfse des seitlichen Anstofses n, welche zusammen mit dem Eigenimpulse N zu einer regulären Präcession $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ Anlafs giebt:

$$\text{a) } n = \frac{AP}{N} \quad \text{bez.} \quad \text{b) } n = \pm\infty.$$

Der Fall a), die früher sog. „langsame Präcession", tritt, da wir oben $P < 0$ und $N > 0$ voraussetzten, für einen seitlichen Anstofs ein, welcher von der Vertikalen gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers wirkt ($n < 0$); im Falle b), der sog. „schnellen Präcession" ist der Sinn des seitlichen Anstofses unbestimmt ($n = \pm\infty$).

Wir haben uns sodann über den zweiten der oben genannten Spezialfälle, die *Pendelbewegung*, zu unterrichten. Der Kreisel bewegt sich wie ein gewöhnliches Pendel, wenn wir ihm in der Anfangslage weder einen Eigenimpuls noch einen seitlichen Anstofs erteilen ($N = n = 0$), also kurz gesagt, wenn der Impulsvektor anfangs die Länge Null hat. Obwohl diese Aussage von selbst einleuchtend ist, wollen wir sie dennoch im Einzelnen durch unsere Impulsbetrachtungen beweisen.

Wenn der Kreisel bei horizontal gestellter Figurenaxe dem Einflufs der Schwere überlassen wird, so erzeugt diese während des ersten Zeitmomentes dt einen unendlich kleinen Impulsvektor von der Gröfse $P \sin\vartheta\, dt = P\, dt$, welcher die Knotenlinie OK (vgl. Fig. 24) zur Axe hat. Der Kreisel beginnt sich also um diese Axe zu drehen, wobei sich der Winkel ϑ verkleinert. Die Lage der Knotenlinie wird bei dieser Drehung nicht geändert. Im nächsten Moment wirkt daher der Zusatzimpuls der Schwerwirkung um dieselbe Axe OK und addiert sich mit dem vorhandenen Impulse algebraisch; die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um diese Axe wird entsprechend beschleunigt; die Knotenlinie behält ihre ursprüngliche Lage. Durch Wiederholung dieser Betrachtung erkennt man: Der Impuls des Kreisels fällt beständig in die Richtung OK; die Bewegung besteht in jedem Augenblicke aus einer Drehung um diese Axe; die Figurenaxe bewegt sich in einer festen

Vertikalebene; die Kurve der Kreiselspitze ist ein vertikal gestellter Kreisbogen. Die Bahngeschwindigkeit der Kreiselspitze berechnet sich dabei durch die Bedingung, dafs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses jederzeit gleich sein mufs der äufseren Drehkraft $P \sin \vartheta$ oder, wenn wir uns der Ausdrucksweise des D'Alembertschen Prinzipes bedienen wollen, dafs diese Drehkraft dem bei unserer Bewegung auftretenden Trägheitswiderstande das Gleichgewicht halten mufs.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, dafs die Kreiselspitze nach Überschreitung des höchsten Punktes der Kugel um ebensoviel herabsinkt, wie sie vorher gestiegen ist, d. h. bis zu einem Punkte des Äquators herunterfällt und dann umkehrt. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment auf, wo die Kreiselspitze den höchsten Punkt der Kugel passiert. Würden wir in diesem Momente den Sinn des vorhandenen Impulsvektors und also die Geschwindigkeit sämtlicher Kreiselpunkte umkehren, so würde die Kreiselspitze nach einem allgemeinen Grundsatze der Mechanik ihre bisherige Bahn im umgekehrten Sinne durchlaufen also einen Kreisquadranten beschreiben. Aus dieser Bahn ergiebt sich aber die Bahn, welche die Kreiselspitze bei Fortsetzung ihres ursprünglichen Bewegungssinnes beschreibt durch Spiegelung an der Vertikalebene OK, wie aus der Symmetrie des die Bewegung beeinflussenden Kraftsystems hervorgeht. Infolgedessen besteht die Fortsetzung der Bahn wieder aus einem Kreisquadranten, welcher bis zu dem mit dem Ausgangspunkte A diametralen Äquatorpunkte B herabreicht. Da die Kreiselspitze in B mit der Geschwindigkeit Null ankommt, haben wir jetzt genau dieselben Verhältnisse, wie zu Beginn der Bewegung in A. Infolgedessen wird die Fortsetzung der Bahnkurve aus dem im umgekehrten Sinne durchlaufenen Halbkreise AB bestehen und so fort. Die Bewegung ist hierdurch in der That als einfache Pendelbewegung charakterisiert.

Bei der stereographischen Projektion erscheint unsere Bahnkurve (vgl. die nebenstehende Figur) einfach als ein Durchmesser (AB) des Einheitskreises, welcher abwechselnd im Sinne des oberen oder unteren Pfeiles durchlaufen wird.

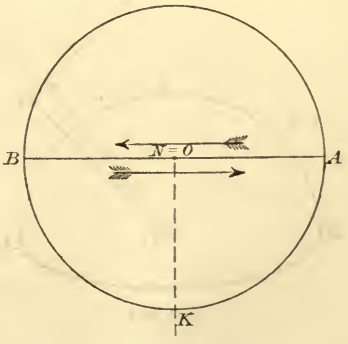


Fig. 24.

An diese Figur, welche wie erwähnt durch die Werte $n = N = 0$ charakterisiert ist, knüpfen wir in erster Linie an, um uns allgemeinere Fälle der Bewegung zu veranschaulichen. Zunächst werden wir eine

Serie von Figuren geben, bei welcher der seitliche Anstofs fortgesetzt gleich Null ist ($n = 0$), während der Eigenimpuls (N) successive vermehrt werden soll.

§ 2. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; Fortsetzung und Schluſs.

Indem wir jetzt zur wirklichen Ausführung unserer qualitativen Diskussion übergehen, nehmen wir, wie verabredet, zunächst $n = 0$ und setzen überdies in der ersten der zu entwickelnden Figuren (Fig. 25) den Eigenimpuls verhältnismäfsig klein voraus gegen die Änderung, welche die Schwerewirkung in der Länge des Impulsvektors etwa während der Zeiteinheit hervorruft, so dafs die Kontinuität mit der vorhergehenden Figur gewahrt bleibt. Um die resultierende Änderung der Bahnkurve beurteilen zu können, wollen wir vorderhand die Kreiselspitze künstlich in der früheren Bahn mit der früheren Geschwindigkeit entlang führen und gleichzeitig dafür sorgen, dafs der Eigenimpuls N seinen Anfangsbetrag beibehält. Praktisch wäre dieses etwa so zu realisieren, dafs man eine Rinne von der Gestalt und Lage der vorherbeschriebenen Bahnkurve herstellte, in welcher die Kreiselspitze ohne Reibung entlang gleiten könnte.

Bei dieser erzwungenen Bewegung ist das Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und dem Trägheitswiderstande, welcher bei der freien Pendelschwingung $N = 0$ bestand, nicht mehr vorhanden. In der That werden ja nur die Änderungen der Horizontal-Komponente des Impulses durch die Schwerkraft kompensiert, während die Änderungen des Eigenimpulses, welcher, wie wir voraussetzten, seine Länge beibehält, seine Richtung im Raume aber zugleich mit der Figurenaxe wechselt, unausgeglichen bleiben. Infolgedessen ergiebt sich ein Widerstand, welchen wir, da er auf der instantanen Rotationsaxe senkrecht steht, nach § 5 des vorigen Kapitels als Deviationswiderstand bezeichnen können. In unserem Beispiele würde sich derselbe als seitlicher Druck auf die Rinne äufsern.

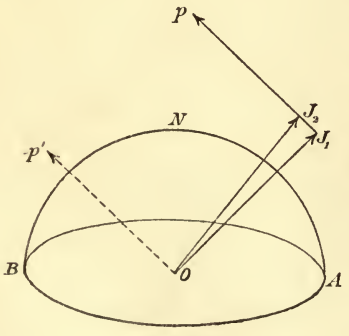


Fig. 24 a.

Der Sinn dieses Druckes ist leicht aus obenstehender Hülfsfigur zu ersehen. Dieselbe stellt den Eigenimpuls in zwei benachbarten Lagen OJ_1, OJ_2 während der ersten Phase der Bewegung dar, d. h. während die Kreiselspitze auf dem vertikalen Kreise

ANB von A nach B pendelt. Der Sinn der Impulsänderung ist durch den Pfeil p gegeben. Um die Axe dieses oder des parallel durch O gezogenen Pfeiles p' wirkt der Deviationswiderstand, welcher dem Sinne der Impulsänderung entgegengesetzt ist, von p oder p' aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Er sucht also die Kreiselspitze während der ganzen ersten Phase der Bewegung in unserer Figur nach hinten hin abzulenken. Ebenso erkennt man, dafs während der zweiten Bewegungsphase, d. h. während die Kreiselspitze von B nach A pendelt, ein Deviationswiderstand auftritt, welcher die Kreiselspitze in der Figur nach vorne überzudrehen strebt. Allgemeingültig können wir sagen: *die Kreiselspitze sucht infolge des Deviationswiderstandes von ihrer Fortschreitungsrichtung aus gerechnet nach rechts hin abzuweichen;* es würde also im Sinne der Bewegung gesprochen die rechte Wand der Rinne einen gewissen Druck auszuhalten haben. Die Gröfse dieses Druckes, welche dem nicht kompensierten Teil der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses gleich ist, wird, wie gleichfalls aus unserer letzten Figur hervorgeht, der Gröfse des Eigenimpulses direkt proportional.

Lassen wir nun die Figurenaxe frei, indem wir die Führung der Kreiselspitze aufheben. Der Erfolg ist dieser: *Die Kreiselspitze wird dem Deviationswiderstande entsprechend von der Bahnkurve aus nach rechts hin ausweichen.* Die gerade Linie, durch welche wir die Pendelschwingung in Fig. 24 darstellten, wird bei Benutzung der früheren graphischen Darstellungsweise in einen Bogen übergehen, welcher nach derjenigen Seite hin geöffnet ist, nach welcher die ablenkende Kraft des Deviationswiderstandes wirkt. Da wir den Eigenimpuls einstweilen verhältnismäfsig klein voraussetzten, wird auch die Abweichung unseres Bogens von der geraden Linie verhältnismäfsig gering sein (vgl. Fig. 25).

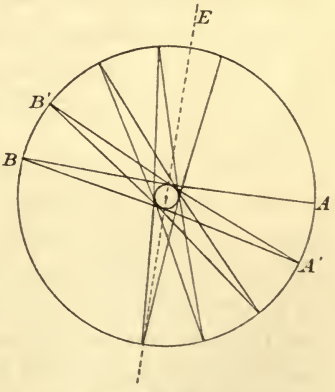


Fig. 25.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Kreiselspitze von ihrer Anfangslage A aus im Raume und daher auch in unserem stereographischen Bilde senkrecht gegen den Äquator fortschreiten mufs. Wir brauchen uns zu dem Zwecke nur die ungefähre Lage des Impulsvektors klar zu machen. Anfangs liegt der Impulsvektor, weil wir $n = 0$ voraussetzten, horizontal. Die folgenden Lagen unseres Vektors ergeben sich aus dieser Anfangslage, indem wir successive den Zusatzimpuls der Schwere geometrisch hinzufügen. Die Axe dieses Zusatzimpulses liegt aber gleichfalls beständig horizontal. Also mufs der

Impulsvektor während der ganzen Dauer der Bewegung eine horizontale Axe haben (im Gegensatz zu der in Fig. 24a dargestellten erzwungenen Bewegung, wo sich der Impulsvektor allmählich aufrichtete). In dieser Betrachtung liegt, nebenbei bemerkt, bereits der Beweis unserer obigen Behauptung, dafs die Impulskomponente n ihren anfänglichen Wert $n = 0$ dauernd beibehält, worauf wir im nächsten Paragraphen unter allgemeineren Voraussetzungen zurückkommen werden. Gleichzeitig mit der Impulsaxe liegt aber bei unserem Kugelkreisel auch die Rotationsaxe horizontal. Da nun die Kreiselspitze in jedem Momente senkrecht gegen die Richtung der Rotationsaxe fortschreitet, so wird sich diese von ihrer auf dem Äquator angenommenen Anfangslage aus in vertikaler Richtung fortbewegen müssen. Die Bahnkurve der Kreiselspitze steht also zu Beginn der Bewegung senkrecht auf dem Äquator, wie behauptet wurde. Übrigens ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit im ersten Momente Null, weil die Rotationsaxe anfangs durch die Kreiselspitze selbst hindurchgeht.

Um den Gesamtverlauf unserer Bahnkurve zu überblicken, haben wir uns nur noch die Symmetrieverhältnisse derselben zu überlegen. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment ins Auge, wo die Kreiselspitze auf der Kugel ihre höchste Lage (H) erreicht hat. Nach unserem Kontinuitätsprinzipe wird dieser höchste Punkt von dem höchsten Punkte, den die Kreiselspitze bei der Pendelbewegung erreicht, dem Nordpole, nur wenig abweichen. Das stereographische Bild derselben wird also nicht weit vom Mittelpunkte der Figur entfernt sein. Durch O und H legen wir die Vertikalebene E hindurch, deren Durchschnitt mit der Äquatorebene uns die Lage des instantanen Impulsvektors angiebt. Darauf argumentieren wir ebenso wie oben bei der einfachen Pendelbewegung:

Wenn wir in dem betrachteten Momente den Sinn des Impulsvektors umkehren würden, so würde die Kreiselspitze ihre bisherige Bahn AH in umgekehrter Richtung durchlaufen und in A mit der Geschwindigkeit Null ankommen. Gleichzeitig berücksichtigen wir, dafs in je zwei hinsichtlich der Ebene E symmetrischen Lagen des Kreisels das Drehmoment der Schwere dasselbe ist. Hieraus ist zu schliefsen, dafs die Kreiselspitze bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewegungsrichtung von H aus den zu AH hinsichtlich der Vertikalebene E symmetrischen Bogen HB beschreiben wird und dafs sie in B mit der Geschwindigkeit 0 ankommt. Der Bogen AB unserer Bahnkurve besteht daher aus zwei spiegelbildlich gleichen Hälften.

In B angekommen befindet sich die Kreiselspitze genau unter den gleichen Bedingungen wie in A. Infolgedessen mufs der weitere Ver-

lauf der Bahnkurve derselbe sein, wie zu Anfang der Bewegung. Es setzt sich also im Punkte B ein neuer Bogen BA' an, welcher seinerseits aus zwei symmetrischen Hälften besteht und welcher dem Bogen AB kongruent ist. Aus letzterem kann er durch eine Drehung um die Vertikale erzeugt werden. Bei B entsteht auf solche Weise ersichtlich eine Spitze. Für den Punkt A' gilt darauf dieselbe Betrachtung, wie für B. Auch in A' bildet die Bahnkurve eine Spitze und setzt sich von hier aus mit einem dem Bogen AB kongruenten Bogen $A'B'$ fort. Alle diese Bögen AB, BA', $A'B'$ ... werden wegen ihrer kongruenten Gestalt und ähnlichen Lage je in ihrem bezüglichen höchsten Punkte H einen gewissen Parallelkreis auf der Kugel berühren, welcher in unserem Falle den Nordpol enge umschliefst. Zusammenfassend können wir daraufhin den Verlauf unserer Bahnkurve folgendermafsen beschreiben:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze stellt in unserem Falle eine Zickzackkurve vor, welche um die Vertikale entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herumläuft, ohne sich im allgemeinen zu schliefsen; sie besteht aus einer Serie kongruenter Bögen oder, wenn wir wollen, aus einer Serie von Halbbögen, welche unter einander abwechselnd symmetrisch gleich und kongruent sind. Die Kurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, nämlich in unserem Falle zwischen dem Äquator und einem Parallelkreise in der Nähe des Nordpoles. Letzteren Kreis berührt unsere Kurve, wo sie ihn trifft; auf ersterem sitzt sie mit Spitzen auf.

Im Anschlufs hieran noch ein Wort über die Vorzüge der von uns gewählten Projektionsmethode. Hätten wir statt der stereographischen die orthographische Projektion benutzt, so würden, wie die in orthographischer Projektion hergestellte Fig. 25a zeigt, statt der Spitzen scheinbar regulär verlaufende Kurvenbögen auftreten. In der That bietet jede in eine Spitze auslaufende Raumkurve, aus der Tangentenrichtung der Spitze betrachtet, einen Anblick dar, der dem Auge das Vorhandensein einer Singularität in keiner Weise verrät. Statt der im Original vorhandenen Spitze haben wir im Bilde nur mehr eine sog. „maskierte Singularität“. Hiernach ist klar, dafs wir bei Benutzung der orthographischen Projektion das Charakteristische der Bahnkurve verwischen würden. Wir werden daher auch die folgenden Figuren stets in stereographischer Projektion herstellen.

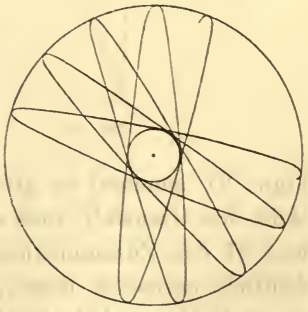


Fig. 25a.

Wir wollen nun, wie bereits in Aussicht genommen, die Gröfse des Eigenimpulses successive wachsen lassen und gleichzeitig den seitlichen Anstofs wie bisher gleich Null nehmen. Machen wir wiederum das orientierende Experiment von pag. 204, indem wir die Kreiselspitze auf der Bahn der Pendelschwingung entlang führen, so werden wir hierbei einen stärkeren Deviationswiderstand wie früher konstatieren, welcher die Figurenaxe von der Bewegungsrichtung nach rechts abzulenken strebt. In der That ergab sich aus der Figur 24a, dafs dieser Widerstand der Gröfse des Eigenimpulses proportional ist. Gehen wir daher von der erzwungenen Pendelbewegung zu der freien Kreiselbewegung über, so wird die Krümmung der einzelnen Bögen, aus denen sich die Bahnkurve zusammensetzt, um so gröfser, ihre Spannweite um so geringer werden, je gröfser wir den Wert des Eigenimpulses N bemessen. Gleichzeitig wird sich der höchste Punkt des einzelnen Bogens von dem Nordpole successive entfernen; der begrenzende Parallelkreis, welcher die sämtlichen höchsten Punkte der Bögen enthält, mufs sich also mit wachsendem N erweitern.

Die folgenden Figuren bringen diese Verhältnisse in drei Schritten zum Ausdrucke. In Figur 26 ist der Eigenimpuls circa dreimal in

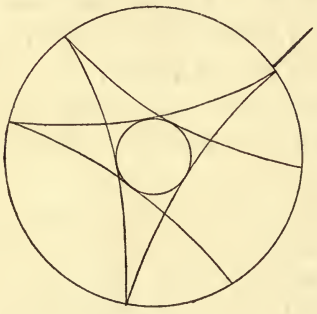


Fig. 26.

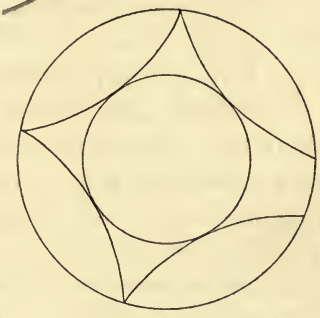


Fig. 27.

Figur 27 neunmal so grofs gewählt, wie in Figur 25. Die Figur 28 stellt den Grenzfall eines sehr grofsen N dar. Während die Figuren 26 und 27 den Zusammenhang mit der Figur der Pendelbewegung noch deutlich erkennen lassen, zeigt Figur 28 eine Bahnkurve, die von einem kontinuierlich durchlaufenen Kreise nur noch sozusagen mikroskopisch verschieden ist. Sie hat mit der Figur der Pendelbewegung die denkbar geringste Ähnlichkeit, eher scheint sie bei ungenauem Hinsehen mit dem zweiten der vorangestellten Spezialfälle, der regulären Präcession, übereinzustimmen. Diese Übereinstimmung betrifft aber, wie wir betonen müssen, nur den *Ort* der Kreiselspitze, nicht

ihre *Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung.* Während bei der regulären Präcession die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Kreiselspitze längs des ganzen Kreises konstant ist, variiert sie in unserem Falle innerhalb sehr kurzer Zeitintervalle fortgesetzt zwischen dem Werte Null, der auf dem Äquator stattfindet, und einem maximalen Werte, der im Berührungspunkt mit dem zweiten begrenzenden Parallelkreise erreicht wird. Wir werden diese höchst bemerkenswerte Bewegungsform passend eine *pseudoreguläre Präcession* nennen können.

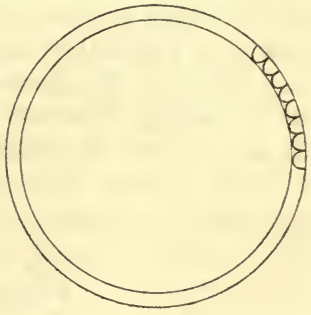


Fig. 28.

Im Experimente ist dieser letzte Fall sogar die Regel, da die Vorrichtungen zum Aufziehen des Kreisels meist einen gegenüber der Schwerewirkung sehr starken Eigenimpuls erzeugen. Untersucht man daher die Kreiselbewegung nur experimentell, so kommt man leicht zu der paradoxen Auffassung, dafs die Kreiselspitze sich von Anfang an senkrecht gegen die Richtung der wirkenden Kraft, der Gravitation, bewegt, einer Auffassung, welche den Prinzipien der Mechanik natürlich direkt zuwiderläuft, welche aber nichtsdestoweniger in der Litteratur häufig vertreten wird.*) Wir betonen deshalb ausdrücklich: *Unter den bisher vorausgesetzten Anfangsbedingungen* ($n = 0$) *ist unsere Bahnkurve allemal eine Spitzenkurve; eine wirkliche reguläre Präcession ist durchaus unmöglich.*

Für die Anstellung der Experimente entnehmen wir unserer letzten Figur noch die Regel, dafs wir den Eigenimpuls des Kreisels möglichst gering wählen müssen, wenn wir überhaupt eine im Einzelnen kontrollierbare Bahnkurve beobachten wollen; es empfiehlt sich daher, den Kreisel statt durch die Schnur mit der Hand in Rotation zu versetzen, wobei die Stärke des Impulses bequem reguliert werden kann. —

Während wir bisher den Eigenimpuls des Kreisels schrittweise wachsen liefsen, den seitlichen Anstofs aber beständig gleich Null annahmen, werden wir jetzt umgekehrt den seitlichen Anstofs variieren und den Eigenimpuls festhalten. Dabei entwickelt sich aus jeder der bisherigen eine ganze Serie neuer Figuren.

So entsteht z. B. aus der gewöhnlichen Pendelbewegung in Fig. 24 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstofses jedesmal ein Fall der *Bewegung des sog. sphärischen Pendels*, bei welcher sich die Kreiselspitze ebenso verhält, wie ein schwerer Massenpunkt, welcher am Ende eines

*) Vgl. unsere Kritik der populären Kreisellitteratur im folgenden Kapitel (§ 3).

um O beweglichen, starren und masselosen Stabes befestigt ist und welchem in seiner Anfangslage ein horizontal gerichteter Anstofs erteilt wird. Wir brauchen uns bei dieser bekannten und leicht zu beobachtenden Bewegung hier nicht aufzuhalten. Wir erwähnen nur des Folgenden wegen, dafs sich die Rückkehrpunkte (Spitzen), welche in unserer Figur bei der gewöhnlichen Pendelbewegung am Äquator auftraten, in abgeflachte Bögen auflösen, welche den Äquator berühren und dafs sich die Spannweite der Bögen, welche ursprünglich zwei Rechte betrug, etwas erweitert. In der That mufs die Kreiselspitze, da sie in ihrer Anfangslage und ebenso in jeder folgenden Lage, wo sie den Äquator erreicht, dem seitlichen Anstofse n ausgesetzt ist, momentan in Richtung des Äquators fortschreiten und zwar je nach dem Vorzeichen von n, von der Vertikalen aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne.

Gehen wir andrerseits von der pseudoregulären Präcession in Fig. 28 aus, so entsteht aus dieser durch Hinzufügung irgend eines seitlichen Anstofses eine Bewegung, welche, im Groben betrachtet, von der früheren nicht sehr verschieden ist und welche (in erweitertem Sinne) abermals als pseudoreguläre Präcession bezeichnet werden kann. Hierbei werden sich unsere mikroskopischen Spitzenbögen in kleine Schleifen bez. in abgeflachte Bögen auflösen, je nachdem wir den anfänglichen horizontalen Anstofs im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne um die Vertikale wirken lassen. Die Beobachtung giebt von dieser Modifikation der Bahnkurve natürlich keine deutliche Rechenschaft.

Wesentlich neue Typen werden sich dagegen aus den Figuren 25—27 ergeben. Speziell wollen wir den Fall eines verhältnismäfsig geringen Eigenimpulses näher betrachten, also diejenige Figurenserie entwickeln, die aus 25 durch Variation von n entsteht. Zunächst lassen wir n von dem Werte Null in Fig. 25 nach dem Negativen abnehmen, erteilen also der Kreiselspitze in der Anfangslage einen Anstofs, der sie entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umzutreiben sucht.

Wir erinnern daran, dafs sich bei einem gewissen, oben berechneten negativen Werte $n = \frac{AP}{N}$ die reguläre Präcession einstellen mufs. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird in diesem Falle einfach der entgegen dem Uhrzeigersinne durchlaufene Äquator (vgl. unten Fig. 31). Der Vergleich der Figuren 25 und 31 wird uns nun einen Anhalt liefern, um die Gestalt der Bahnkurve für die zwischenliegenden Werte von $n \left[0 > n > \frac{AP}{N}\right]$ beurteilen zu können. Wir dürfen nämlich auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs diese Bahnkurven

sich stetig zwischen die Figuren 25 und 31 einordnen müssen. Auf dasselbe Prinzip bez. auf unsere früheren Überlegungen gestützt, werden wir ferner voraussetzen, dafs die allgemeinen Symmetrieverhältnisse der Bahnkurve 25, die Kongruenz der Teilbögen u. s. w., bei Hinzufügung eines seitlichen Anstofses erhalten bleiben.

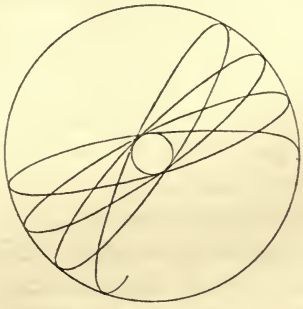


Fig. 29.

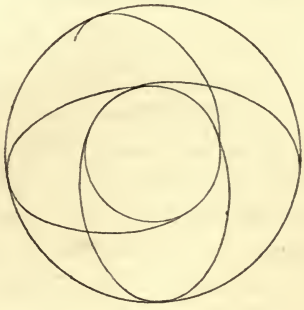


Fig. 30.

In Figur 25 waren nun die einzelnen kongruenten Kurvenbögen zwischen dem Äquator und einem kleineren, in der Nähe des Nordpols befindlichen Parallelkreise enthalten; in Figur 31, können wir sagen, ist dieser zweite Parallelkreis mit dem Äquator zusammengefallen, da die Bahnkurve selbst in diesen übergegangen ist. Wir schliefsen hieraus, dafs für zwischenliegende Werte von n jener zweite begrenzende Parallelkreis stetig anwachsen wird. Infolgedessen werden sich die Teilbögen der Bahnkurve nach dem Äquator hin ausbauchen und gleichzeitig bei abnehmendem n successive in die Länge strecken müssen. Überdies ist klar, dafs, ebenso wie beim Übergange vom gewöhnlichen zum sphärischen Pendel, die Spitzen der Figur 25 sich in abgeflachte Bögen auflösen werden, da ja, überall wo die Kreiselspitze den Äquator erreicht, der tangential zum Äquator gerichtete seitliche Anstofs n wirksam ist.

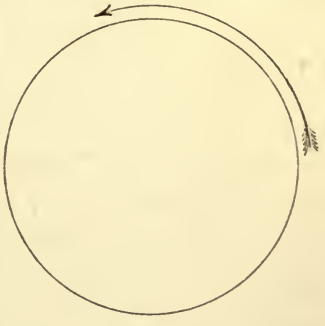


Fig. 31.

Wir zeichnen daraufhin die drei Figuren 29, 30, 31, von denen die erste einem kleinen Werte des seitlichen Anstofses entspricht, so dafs die Kontinuität mit Figur 25 augenfällig ist, (in der Figur wurde speziell $n = -N$ gewählt), die zweite einem gröfseren Werte von n (und zwar in der Figur einem 5-mal so grofsen Werte wie im vorhergehenden Falle); die dritte Figur ist der Spezialfall der langsamen regulären

Präcession $n = \frac{AP}{N}$; (unter den in der Zeichnung zu Grunde gelegten Verhältnissen tritt dieser Fall wieder für ein 5-mal so grofses n ein, wie der Fall der Figur 30).

Den Gesamtcharakter der Bahnkurven unter den vorliegenden Bedingungen eines konstanten N und eines von Null bis $\frac{AP}{N}$ abnehmenden Wertes von n können wir daraufhin folgendermafsen schildern:

Die Bahnkurve läuft fortgesetzt entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herum, ohne sich im allgemeinen zu schliefsen; sie besteht allemal aus einer Serie unter sich symmetrisch gleicher oder kongruenter Halbbögen, deren Spannweite bei abnehmendem n successive wächst und die sich mehr und mehr dem Äquator anschmiegen. Die Bahnkurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, welche sie überall, wo sie sie trifft, berührt, nämlich des Äquators einerseits und eines mit abnehmendem n sich stetig vergröfsernden Parallelkreises andrerseits.

Wir gehen nun abermals zu Figur 25 zurück und lassen jetzt n unter Festhaltung von N im positiven Sinne wachsen; wir erteilen also der Kreiselspitze im Anfangszustande einen seitlichen Anstofs im Sinne des Uhrzeigers. Der Erfolg wird dabei gewissermafsen der umgekehrte sein, wie vorher. Während sich der zweite begrenzende Parallelkreis bei von Null aus abnehmendem n, wie wir sahen, erweiterte, wird er sich bei wachsendem n zunächst verengern; während die Spannweite des einzelnen Teilbogens früher zunahm, nimmt sie jetzt zunächst ab. Im übrigen bleibt der Gesamtcharakter der Bewegung ein ähnlicher wie in Figur 25; insbesondere mufs die Bahnkurve bei genügend kleinem positiven n gleichfalls im Ganzen betrachtet entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herumlaufen. Andrerseits wird sich aber die Kreiselspitze in der Anfangslage und ebenso in jedem späteren Momente, wo sie den Äquator erreicht, wegen des positiven Vorzeichens von n in der Richtung des Äquators und zwar im Sinne des Uhrzeigers bewegen. Wir schliefsen hieraus, dafs es auf jedem Teilbogen Punkte geben mufs, wo die Kreiselspitze, in radialer Richtung fortschreitend, ihren Umlaufungssinn der Vertikalen ändert und erkennen so die Notwendigkeit des Auftretens von Schleifen. Die Spitzen der Figur 25, welche in Figur 29 in abgeflachte Bögen übergingen, lösen sich also jetzt in Schleifen auf, wie dieses ja in der Geometrie eine häufige Erscheinung ist. Alle diese Bemerkungen werden durch die folgende Figur 32 bestätigt, welche einem sehr kleinen positiven Werte von n entspricht (wir haben $n = 0{,}4\,N$ gewählt).

Wenn wir n weiter wachsen lassen, kommen wir bald zu einem Werte, wo sich der innere Parallelkreis auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat (vgl. Fig. 33). Nebenbei bemerkt entspricht dieser Fall, wie wir später sehen werden, dem Werte $n = N$. Die Punkte, in denen sich bei der vorigen Figur der Umlaufungssinn der Vertikalen änderte, sind jetzt in den Nordpol der Kugel zusammengerückt.

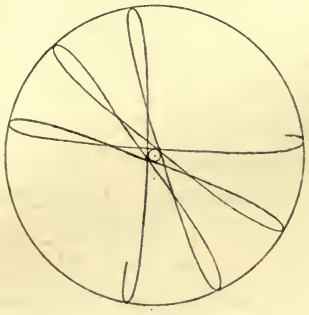


Fig. 32.

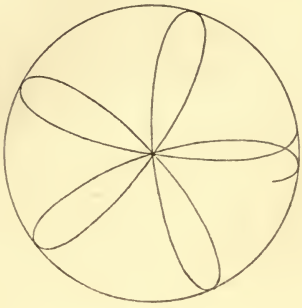


Fig. 33.

Um die Gestaltung der Bahnkurven bei fortgesetzt wachsendem n zu überblicken, ziehen wir endlich den Grenzfall $n = \infty$ heran, bei welchem nach pag. 202 die Bewegung wieder eine reguläre Präcession wird. Während sich also im Falle $n = N$ der innere Parallelkreis auf einen Punkt reduzierte, fällt er im Falle $n = \infty$ mit dem äufsern Begrenzungskreise zusammen. Wir werden abermals auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs der fragliche Parallelkreis bei wachsenden Werten von n $(N < n < \infty)$ sich stetig erweitern wird. Während er aber vorher von der Bahnkurve von aufsen berührt wurde, wird er jetzt von dieser umfafst. Die Kurve läuft jetzt durchweg im Sinne des Uhrzeigers und zwar bei wachsendem n mit wachsender Geschwindigkeit um die Vertikale; sie wird durch den sich erweiternden inneren Parallelkreis immer mehr an den Äquator herangedrängt; die Spannweite der kongruenten Bögen, aus denen sie sich zusammensetzt, wird gröfser und gröfser. Ein Beispiel für diese Gestaltung der Bahnkurve liefert Figur 34, in welcher nebenbei bemerkt $n = 5\,N$ genommen ist. Der Grenzfall $n = \infty$, die schnelle reguläre Präcession, möge schematisch durch die Figur 35 angedeutet werden. Dem doppelten

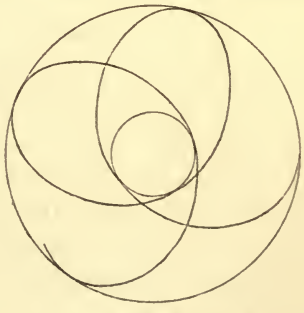


Fig. 34.

Sinne des Durchlaufungspfeiles entsprechend können wir die letzte Figur ebensowohl auffassen als Grenzfall der Bahnkurve bei unendlich wachsendem positiven, wie bei unendlich abnehmendem negativen n.

Wollen wir das Verhalten der Bahnkurven bei wachsendem positiven n zusammenfassend schildern, so können wir etwa folgendermafsen sagen:

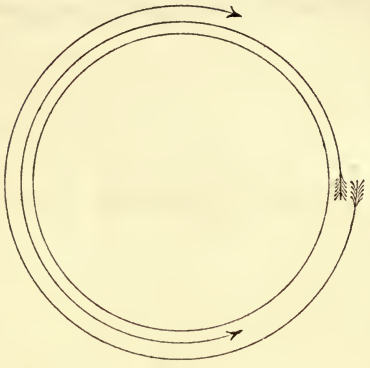


Fig. 35.

Bei positivem n verläuft die Bahnkurve in der Nähe des Äquators allemal im Sinne des Uhrzeigers, kehrt aber bei nicht zu grofsen Werten von n innerhalb jedes der kongruenten Teilbögen, aus denen sie sich zusammensetzt, zweimal ihren Umlaufungssinn um. Charakteristisch für diese Bahnkurven ist das Auftreten von Schleifen. Der innere Begrenzungskreis wird anfangs von der Bahnkurve ausgeschlossen, nachdem aber der höchste Punkt der Kugel einmal überschritten ist, von aufsen umfafst. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt gleichzeitig von da ab immer mehr zu und wird im Grenzfalle $n = \infty$ unendlich grofs.

Es erübrigt nur noch den Übergang zu suchen von der langsamen Präcession $n = \frac{AP}{N}$ in Figur 31 zu der schnellen $n = \pm\infty$ in Figur 35. Wir sahen, dafs sich der bewegliche Parallelkreis mit abnehmendem $n < \frac{AP}{N}$ dem Äquator successive nähert, um im Falle der regulären Präcession mit diesem zusammenzufallen. Bei weiter abnehmendem n wird er zunächst seine Bewegungsrichtung beibehalten, also sich von dem Äquator wieder entfernen und auf die südliche Hälfte der Einheitskugel bez. im stereographischen Bilde in das Äufsere des Einheitskreises übergehen. Dementsprechend würde im Bilde fortan der Äquator der innere, der bewegliche Parallelkreis der äufsere Begrenzungskreis werden. Indessen hält die genannte Bewegungstendenz nicht lange vor; es giebt nämlich für unseren beweglichen Parallelkreis eine tiefste (bez. im Bilde eine äufserste) Lage. Nachdem diese für ein gewisses n erreicht ist, strebt der Parallelkreis bei weiter abnehmendem n wieder dem Äquator zu, mit dem er ja im Falle $n = -\infty$ zusammenfallen mufs. Aber selbst in der genannten extremen Lage liegt unser Parallelkreis unter den in unseren Figuren vorausgesetzten Verhältnissen dem Äquator so nahe, dafs er mit dem Auge überhaupt nicht von jenem zu unterscheiden sein würde. Dementsprechend wird auch die Bahn-

kurve der Kreiselspitze dem Äquator dauernd aufserordentlich nahe bleiben, so dafs wir auf ihre graphische Wiedergabe verzichten müssen. Im stereographischen Bilde würde sie den Äquator in nahezu kreisförmigen Windungen umschliefsen, welche den grofsen negativen Werten von n entsprechend entgegen dem Sinne des Uhrzeigers mit grofser Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Der Kreis der Möglichkeiten, welche sich bei festgehaltenem N und variabelm n darbieten, hat sich hiermit geschlossen.

Wir könnten nun, ähnlich wie wir bisher an die Figur 25 anknüpften, aus den Figuren 26 und 27 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstofses entsprechende Figurenserien entwickeln. Indessen müssen wir uns damit begnügen, später (vgl. § 7) auf die hierbei auftretenden Abweichungen von der vorhergehenden Serie hinzuweisen.

Zum Schlusse wollen wir in einem Schema, in welchem n als Abscisse, N als Ordinate aufgetragen wird, die vorstehend verzeichneten Figuren durch Eintragung ihrer Nummer lokalisieren.

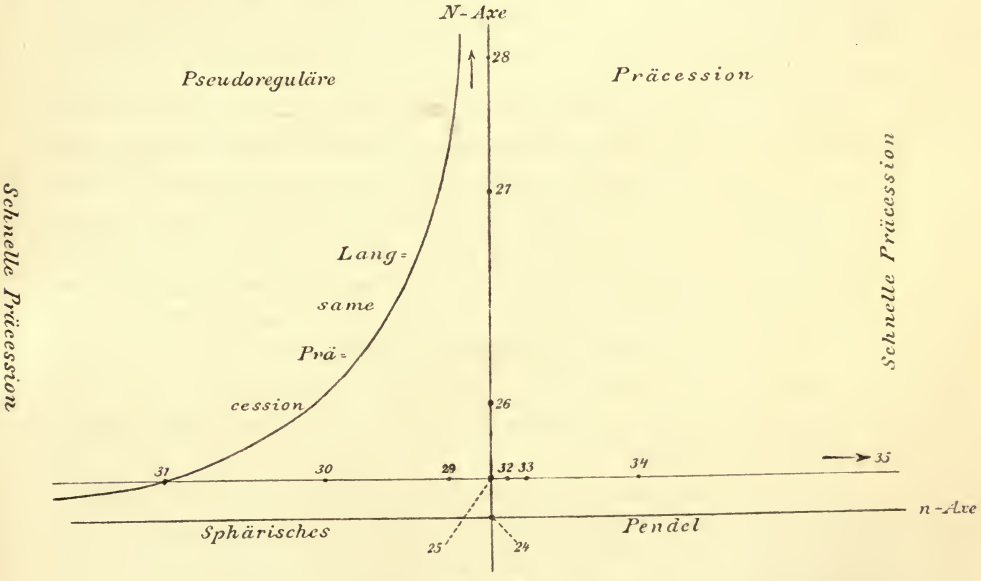


Fig. 36.

Die Ordinatenaxe unseres Schemas enthält die Figuren 24 bis 28; die Abscissenaxe entspricht den sämtlichen Fällen der gewöhnlichen oder sphärischen Pendelbewegung. Die Figuren 29 bis 35 liegen auf einer der Abscissenaxe parallelen und wenig von ihr entfernten Geraden. Gehen wir parallel der Ordinatenaxe ins Unendliche, so kommen wir

allemal in das Gebiet der pseudoregulären Präcession; schreiten wir in der Richtung der Abscissenaxe ins Unendliche fort, so finden wir den Fall der schnellen regulären Präcession vor. Die langsame reguläre Präcession bestimmt, wie aus der Formel $nN = PA$ hervorgeht, eine gleichseitige Hyperbel von der eingezeichneten Lage. Die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche durch die Gesamtheit aller Bahnkurven bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe und bei positivem Betrage des Eigenimpulses gebildet wird, findet so in unserem Schema eine anschauliche Darstellung.

§ 3. Quantitative Behandlung der allgemeinen Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Ausführung der erforderlichen sechs Integrationen.

Wir gehen nun von der angenäherten qualitativen Diskussion zu einer genauen quantitativen Behandlung über, wobei wir die Beschränkung auf den Kugelkreisel zunächst fallen lassen und einen beliebigen symmetrischen Kreisel von den Trägheitsmomenten A und C betrachten. Es handelt sich hierbei in letzter Linie darum, das System von Differentialgleichungen, welches die Bewegung des Kreisels reguliert, zu integrieren.

Zunächst stellen wir einige Impulsbetrachtungen von geometrischem Charakter an, welche die Ausführung der gedachten Integrationen teilweise zu ersetzen vermögen. Dabei stützen wir uns wesentlich auf den Fundamentalsatz IIa von pag. 115, nach welchem die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft, d. h. in unserem Falle gleich dem Drehmoment der Schwerkraft ist. Wir suchen vor allem, ähnlich wie pag. 123 beim kräftefreien Kreisel, Näheres über die Gestalt der beiden „Impulskurven“ auszusagen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors relativ gegen den Raum bez. relativ gegen den Körper beschreibt.

Erstens bemerken wir, dafs das Drehmoment der Schwere, welches ja seiner Axe nach in die Knotenlinie fällt, beständig senkrecht auf der Vertikalen steht. Nach unserem Impulssatze schreitet also auch der Endpunkt des Impulses im Raume beständig senkrecht gegen die Vertikale vorwärts. Wir sehen hieraus:

Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Raum in einer horizontalen Ebene; unsere erste Impulskurve ist also eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Vertikale, d. h. die früher als „seitlicher Anstofs“ bezeichnete Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.

Nennen wir die Komponenten des Impulses im xyz-System (die Koordinaten seines Endpunktes), wie pag. 200 verabredet, l, m, n, so haben wir hiernach:

(1) $$n = \text{const.}$$

Dieses Resultat wurde schon im vorigen Paragraphen erwähnt und in einem speziellen Falle, ähnlich wie soeben geschehen, begründet.

Zweitens fassen wir die Kurve ins Auge, welche der Endpunkt des Impulses relativ gegen den Kreisel beschreibt. Dabei werden wir statt von dem Impulssatze IIa, welcher die Anderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume bestimmt, von dem Impulssatze IIb von pag. 145 ausgehen, durch welchen die relativen Anderungen des Impulses gegen den Kreisel festgelegt wurden. Nach diesem letzten Satze ist die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses relativ gegen den Kreisel nach Richtung und Gröfse gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft vermehrt um die sogenannte centrifugale Drehkraft. Letztere wurde l. c. gleich gefunden dem vektoriellen Produkt aus Impuls- und Rotationsvektor; ihre Axe steht mithin senkrecht auf diesen beiden Vektoren und also, da beim symmetrischen Kreisel diese beiden Vektoren mit der Figurenaxe in einer Ebene liegen, auch senkrecht auf der Figurenaxe. Da überdies auch die Drehkraft der Schwere auf der Figurenaxe senkrecht steht, so sehen wir, dafs der Impuls-Endpunkt im Kreisel beständig senkrecht gegen die Figurenaxe fortschreiten mufs. Wir haben also den Satz:

Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Kreisel in einer der Aquatorebene parallelen Ebene; auch unsere zweite Impulskurve ist eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe, d. h. die oben als Eigenimpuls eingeführte Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.

Bezeichnen wir die Impulskomponenten im XYZ-System, wie früher, mit L, M, N, so gilt hiernach die Gleichung:

(2) $$N = \text{const.}$$

Wir haben damit ein ebenfalls schon im vorigen Paragraphen erwähntes Resultat allgemein abgeleitet.

Neben den Impulskurven können wir diejenigen Kurven betrachten, welche der Endpunkt des Rotationsvektors relativ gegen den Raum und gegen den Kreisel beschreibt, d. h. die *Herpolhodie-* und die *Polhodiekurve.* Von diesen zeigt aber nur die Polhodiekurve ein entsprechend einfaches Verhalten, wie die Impulskurven. *In der That liegt die Polhodiekurve in einer zur Figurenaxe senkrechten Ebene;* ihre Punkte haben von der Äquatorebene den festen Abstand.

$$r = \frac{N}{C}.$$

Versuchen wir dagegen den entsprechenden Übergang von unserer ersten Impulskurve zur Herpolhodiekurve zu machen, welcher, wie wir wissen, in einer Deformation nach den Axen X, Y, Z besteht, so kommen wir wegen der veränderlichen räumlichen Lage dieser Axen zu keinem so einfachen Resultat; *die Herpolhodiekurve ist* (von dem Falle des Kugelkreisels abgesehen) *keine ebene, sondern*, wie wir demnächst zeigen werden, *im allgemeinen eine sphärische Kurve.*

Diese Bemerkung kann abermals dazu dienen, die Vorzüge, welche in kinetischer Hinsicht der Impulsvektor vor dem Rotationsvektor darbietet, ins rechte Licht zu stellen. Es führt offenbar zu Unzuträglichkeiten, wenn man den kinematisch definierten Rotationsvektor auch in kinetischen Fragen voranstellen will. Vielmehr ist hier der Impulsvektor das einfachste, die Bewegung regulierende Element.

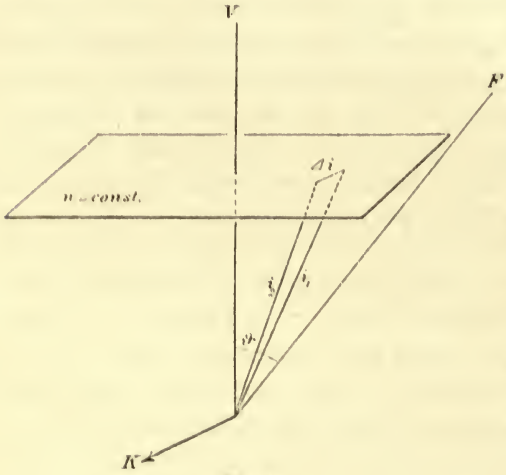


Fig. 37.

Während wir unsere bisherigen Schlüsse aus der Richtung der Impulsänderung gezogen haben, wollen wir nun auch ihre Gröfse betrachten. Wir werden so zu einer weiteren Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung geführt werden.

Es handle sich um zwei benachbarte Lagen i_1 und i_2 des Impulsvektors, welche dieser am Anfang und am Ende des Zeitintervalles Δt inne hat. Die Endpunkte von i_1 und i_2 geben eine Verbindungslinie Δi, welche nach unserem Impulssatze der Knotenlinie K parallel ist und bei hinreichend kleinem Δt die Länge hat

$$|\Delta i| = P \sin \vartheta \, \Delta t. \tag{a}$$

Gleichzeitig wird nach dem Pythagoräischen Lehrsatz (vgl. die Figur)

$$\begin{aligned} |i_2|^2 - |i_1|^2 &= |\Delta i|^2 - 2\,|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, \Delta i) \\ &= |\Delta i|^2 + 2\,|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, K). \end{aligned} \tag{b}$$

Nun bedeutet $|i_1| \cos(i_1, K)$ die Projektion des Impulsvektors auf die Knotenlinie, welche bis auf den Faktor A mit der Projektion des Drehungsvektors auf diese Gerade übereinstimmt. Eine Drehung um die Knotenlinie bringt aber in der Zeit Δt eine Änderung des

Winkels ϑ hervor von solchem Betrage, dafs $\Delta\vartheta : \Delta t$ gleich der Gröfse der genannten Drehung wird. Wir haben also

$$|i_1| \cos(i_1, K) = A \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

und wegen (a)

$$(c) \qquad |\Delta i|\,|i_1| \cos(i_1, K) = AP \sin\vartheta\,\Delta\vartheta.$$

Gehen wir in Gleichung (b) zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so fällt das Glied zweiter Ordnung $|\Delta i|^2$ fort und wir erhalten mit Rücksicht auf (c)

$$d(|i|^2) = 2AP \sin\vartheta\, d\vartheta = -d(2AP\cos\vartheta).$$

Mithin behält der Ausdruck

$$|i|^2 + 2AP\cos\vartheta$$

bei der Bewegung seine ursprüngliche Gröfse bei. Bezeichnen wir diese feste Gröfse mit k, so haben wir:

$$(3) \qquad |i|^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Diese Beziehung hätten wir ohne weiteres hinschreiben können, wenn wir uns aufser auf unsern allgemeinen Impulssatz auch auf den Satz der lebendigen Kraft berufen hätten, welcher ja im zweiten Kapitel seinerseits aus unserem Impulssatze gefolgert wurde. In der That sehen wir sofort, dafs die Gleichung (3) mit Rücksicht auf (2) in den Satz der lebendigen Kraft übergeht. Statt (3) können wir nämlich schreiben:

$$L^2 + M^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Dividieren wir nun mit $2A$ und führen wir rechts eine neue Konstante h ein, welche mit der früheren durch die Formel:

$$(3a) \qquad h = \frac{k}{2A} + \frac{N^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$$

zusammenhängt, so entsteht

$$(3b) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) + P\cos\vartheta = h.$$

Hier bedeutet der erste Term der linken Seite die kinetische Energie T des Kreisels

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) = \frac{1}{2}(A(p^2 + q^2) + Cr^2);$$

der zweite Term stellt die potentielle Energie U im Falle der Schwerewirkung dar. Es ist nämlich nach der Definition von pag. 117, 118 $dU = -dA$, wo dA die von den äufseren Kräften an unserem System bei einer unendlich kleinen Verrückung geleistete Arbeit ist, d. h. in unserem Falle

$$dA = P\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Mithin folgt in der That

$$U = P \cos \vartheta,$$

so dafs wir statt (3 b) wieder schreiben können

$$T + U = h. \tag{3'}$$

Die vorstehende geometrische Überlegung müssen wir also auffassen als einen *neuen, auf den schweren symmetrischen Kreisel zugeschnittenen Beweis vom Satze der lebendigen Kraft.*

Wir wollen uns nun die analytische Bedeutung unserer bisherigen Resultate klar machen. Wir werden sehen, dafs wir in den Gleichungen (1), (2) und (3) drei erste Integrale der Differentialgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels gefunden haben.

Zu diesem Zwecke werden wir diese Gleichungen neuerdings aus den Differentialgleichungen durch Integration ableiten. Am bequemsten legen wir die letzteren in der Form der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen, wie sie auf pag. 154 angegeben sind, zu Grunde. Hier haben wir für T den Ausdruck (6) von pag. 156 einzutragen

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2 \vartheta \cdot \psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos \vartheta \cdot \psi')^2,$$

aus welchem folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Andrerseits ist die Arbeit, welche die Schwerkraft bei der unendlich kleinen Verrückung $d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$ leistet, wie eben benutzt wurde:

$$dA = \Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\vartheta = P \sin \vartheta\, d\vartheta.$$

Die Komponenten Φ, Ψ, Θ der äufseren Kraft in Richtung der Koordinaten φ, ψ, ϑ sind also

$$\Phi = \Psi = 0, \quad \Theta = P \sin \vartheta.$$

Daraufhin gehen die beiden ersten Lagrangeschen Gleichungen über in

$$\frac{d[\Phi]}{dt} = \frac{d[\Psi[}{dt} = 0;$$

wir haben also für die ganze Dauer der Bewegung

$$[\Phi] = \text{const}, \quad [\Psi] = \text{const}.$$

Nun sind aber nach pag. 109 die Impulskomponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ nichts anderes als die senkrechten Projektionen des Impulsvektors auf die Figurenaxe und die Vertikale, also bez. gleich N und n. Unsere vorstehenden Gleichungen sind also mit (1) und (2) identisch. Die festen Werte unserer beiden Impulskomponenten werden wir daraufhin als zwei erste Integrationskonstanten bezeichnen können.

Natürlich können wir dieselben Integrale auch aus den Eulerschen Gleichungen von pag. 141, 142 ableiten. Hier haben wir $A = B$ zu setzen und für $\mathsf{\Lambda}$, M, N bez. die Werte einzutragen:

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin\vartheta \cos(K, X), \quad \mathsf{M} = P \sin\vartheta \cos(K, Y), \quad \mathsf{N} = P \sin\vartheta \cos(K, Z).$$

Dabei ist zunächst

$$\cos(K, Z) = 0,$$

weil die Knotenlinie auf der Figurenaxe senkrecht steht; da wir ferner (vgl. Fig. 3 auf pap. 18) den von der Knotenlinie aus gezählten Winkel, welchen dieser Halbstrahl mit der positiven X-Axe bildet, mit φ bezeichnen, so wird

$$\cos(K, X) = \cos\varphi, \qquad \cos(K, Y) = -\sin\varphi.$$

Es ergiebt sich also

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \mathsf{M} = -P \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \mathsf{N} = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (3″) von pag. 142 lautet daher einfach

$$C \frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dt} = 0,$$

so dafs sich wieder die Gleichung (2) ergiebt.

Die Ableitung von (1) aus den Eulerschen Gleichungen würde eine etwas längere Umrechnung erfordern, welche wir hier unterdrücken wollen.

Unsere Gleichung (3) schliefslich können wir nach der gewöhnlichen analytischen Beweismethode des Satzes von der lebendigen Kraft aus den Lagrangeschen oder Eulerschen Gleichungen finden, indem wir diese mit geeigneten Faktoren multiplizieren und addieren; hierbei tritt als dritte Integrationskonstante unsere obige Gröfse h, die Konstante der lebendigen Kraft, auf, welche unserer obigen Konstanten k äquivalent ist.

Aufser den drei Integralgleichungen (1) bis (3) verlangt die vollständige Integration unseres Problems die Aufstellung von drei weiteren Beziehungen zwischen den Lagenkoordinaten des Kreisels und der Zeit mit je einer willkürlichen Integrationskonstanten. Diese Beziehungen lassen sich nicht, wie unsere drei ersten Integrale, in elementarer Form angeben; dementsprechend dürfte es kaum gelingen, sie durch direkte geometrische Betrachtungen abzuleiten. Immerhin ist ihr analytischer Charakter sehr einfach; sie lassen sich nämlich durch blofse Quadraturen herstellen.

Wir müssen jetzt neben den Eulerschen die sog. kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 bez., was bequemer ist, neben den La-

grangeschen Gleichungen (1) von pag. 154 die Gleichungen (2) (s. ebendaselbst)

$$[\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'},$$

berücksichtigen. In den beiden ersten dieser Gleichungen tragen wir links die konstanten Werte N und n ein; die rechten Seiten berechnen wir nach dem oben angegebenen Ausdrucke von T. Wir finden so

$$C(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi') = N,$$
$$C\cos\vartheta \cdot \varphi' + (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi' = n.$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen ergiebt sich zunächst

$$\psi' = \frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}; \tag{4}$$

sodann folgt aus der ersten Gleichung:

$$\varphi' = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{N - n\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}. \tag{5}$$

Die Integration nach t läfst sich in dieser Form natürlich noch nicht ausführen. Gehen wir aber mit den gefundenen Werten von φ' und ψ' in die Gleichung (3′) der lebendigen Kraft hinein, so ergiebt sich:

$$\frac{A}{2}\left\{\vartheta'^2 + \left(\frac{N\cos\vartheta - n}{A\sin\vartheta}\right)^2\right\} + \frac{C}{2}\left\{\frac{N^2}{C^2}\right\} + P\cos\vartheta = h.$$

Hier führen wir die wichtige Hülfsvariable

$$u = \cos\vartheta$$

ein; die vorstehende Gleichung schreibt sich dann, nachdem wir sie mit $2A\sin^2\vartheta$ multipliziert haben:

$$A^2u'^2 + (Nu - n)^2 + \frac{A}{C}N^2(1-u^2) + 2APu(1-u^2) = 2Ah(1-u^2).$$

Somit wird

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \tag{6}$$

wo U eine Abkürzung für den folgenden etwas komplizierten Ausdruck bedeutet:

$$U = \frac{1}{A^2}\left[2Ah(1-u^2) - (Nu-n)^2 - \frac{A}{C}N^2(1-u^2) - 2APu(1-u^2)\right], \tag{7}$$

In U führen wir statt der Konstanten h unsere frühere Gröfse k ein; da nach Gleichung (3a)

$$2Ah - \frac{A}{C}N^2 = k - N^2$$

wird, so ergiebt sich:

$$U = \frac{1}{A^2}\left[-(Nu-n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2)\right] \tag{7′}$$

oder, nach Potenzen von u geordnet:

$$(7'') \quad U = \frac{1}{A^2}[2APu^3 - ku^2 + 2(nN - AP)u + (k - N^2 - n^2)].$$

Da U lediglich von unserer Hülfsvariabeln u abhängt, läfst sich die Integration in (6) unmittelbar ausführen. Wir haben nur zu schreiben:

$$(6') \quad dt = \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Tragen wir diesen Wert von dt in (4) und (5) ein, so gehen letztere Gleichungen über in

$$(4') \quad d\psi = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

und

$$(5') \quad d\varphi = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) dt + \frac{N - nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Nunmehr führen wir die Quadraturen in (4'), (5') und (6') aus und bekommen:

$$(8) \quad \begin{cases} t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi = \int \frac{N - nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) t, \end{cases}$$

wobei U durch (7), (7') oder (7'') definiert ist.

Die drei additiv hinzutretenden Integrationskonstanten haben wir nicht hinzugeschrieben, weil sie für den geometrischen Charakter der zugehörigen Bewegung belanglos sind. Diese Integrationskonstanten sind etwa die Werte t_0, ψ_0, φ_0, welche wir dem Werte von u an der unteren Grenze der Integrale zuordnen mögen. Sie können durch passende Wahl des Zeitpunktes, von dem aus wir t, sowie durch passende Bestimmung der Axen x und X, von denen aus wir ψ und φ messen, herausgeschafft werden. Immerhin konstatieren wir, dafs wir in den drei wesentlichen Konstanten n, N und k (oder h), sowie in den drei unwesentlichen Konstanten t_0, ψ_0 und φ_0 die erforderliche Anzahl von *sechs willkürlichen Gröfsen* bekommen haben, welche zu der allgemeinen Bewegung eines Systems von drei Freiheitsgraden gehören.

Dafs wir in solcher Weise durch blofse Quadraturen zum Ziel gelangten, werden wir an dieser Stelle als einen Glücksfall ansehen, der übrigens nicht vereinzelt dasteht. In der That werden wir im letzten Kapitel eine umfassende Klasse wichtiger mechanischer Probleme,

die Bewegungen der sogenannten cyklischen Systeme, kennen lernen, welche sich genau so wie unser Kreiselproblem durch blofse Quadraturen teilweise oder vollständig behandeln lassen. Der Kreisel wird dort als ein instruktives Beispiel zur Theorie der cyklischen Systeme erscheinen. Gleichzeitig wird die hier befolgte Integrationsmethode durch Vergleich mit den allgemeineren Problemen eine neue Beleuchtung erfahren.

In historischer Hinsicht bemerken wir schliefslich, dafs man die Aufstellung der obigen Integralformeln Lagrange*) verdankt, der das Problem des schweren symmetrischen Kreisels zum erstenmale allgemein in Angriff genommen hat.

§ 4. Allgemeine Periodicitätseigenschaften der Bewegung. Vorläufiges über das Verhalten der elliptischen Ingrale bei Umlaufung des Integrationssegmentes. Integraldarstellung der α, β, γ, δ.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Integrale für t, ψ und φ bezeichnet man, da sie die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke dritten Grades unter dem Integralzeichen führen, als *elliptische Integrale*. Bekanntlich lassen sich solche Integrale im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen ersetzen. Sie definieren vielmehr eine Klasse transcendenter Funktionen, welche von den Mathematikern seit 100 Jahren mit Vorliebe untersucht worden ist.

Es soll unsere nächste Aufgabe sein, aus der Form dieser Funktionen die allgemeinsten und augenfälligsten Eigenschaften der Bewegung des schweren Kreisels abzulesen. Insbesondere wollen wir auf analytischem Wege begründen, dafs die Kreiselspitze fortgesetzt zwischen zwei Parallelkreisen der Einheitskugel auf- und abschwankt und dafs ihre Bahnkurve aus lauter kongruenten oder symmetrisch gleichen Stücken besteht. Diese Thatsachen wurden bereits in den ersten Paragraphen dieses Kapitels auf mechanisch-geometrischem Wege dargethan. Abgesehen von der genaueren Begründung der früheren etwas unsicheren Schlüsse werden wir durch das Folgende die Möglichkeit erreichen, die Gestalt der Bahnkurven im einzelnen durch numerische Rechnung zu kontrollieren.

Wir haben dabei im Grunde dieselben Betrachtungen anzustellen, die sonst in der Theorie der elliptischen Funktionen entwickelt werden. Indem wir diese Betrachtungen an unser konkretes Beispiel anknüpfen, hoffen wir geradezu eine bequeme erste Einführung in diese Theorie zu geben, welche wir hier nicht als bekannt voraussetzen werden.

---

*) In der *Mécanique analytique sec. partie*, sect. IX, Nr. 35. Ges. W. Bd. XII.

Wir stellen uns fürs Erste durchaus auf den Standpunkt der älteren Autoren, etwa auf den Legendres, und betrachten nur reelle Werte der Integrationsvariabeln u, welche wir uns auf einer Geraden, der „u-Axe", repräsentieren werden. Wegen der geometrischen Bedeutung von u ($u = \cos\vartheta$) kommt von dieser Axe für die Mechanik direkt nur das Stück zwischen -1 und $+1$ in Betracht.

Auch dieses Stück wird bei den Kreiselbewegungen im allgemeinen nur teilweise von u bestrichen. Da nämlich das Inkrement von t sicher eine reelle Gröfse sein mufs, so darf u wegen der Beziehung

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

nur solche Werte annehmen, für welche $\sqrt{U}$ reell, also U positiv ist. Nun wird aber U in den Punkten $u = \pm 1$ im allgemeinen negativ und niemals positiv. Wir haben nämlich nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen

$$\text{für} \quad u = +1 \cdot \cdot \cdot \cdot \quad U = -\frac{1}{A^2}(N-n)^2,$$

$$\text{für} \quad u = -1 \cdot \cdot \cdot \cdot \quad U = -\frac{1}{A^2}(N+n)^2,$$

d. h. $U < 0$, sofern nicht gerade $N = \pm n$ und also $U = 0$ ist. Daher erscheint die Variable u auf ein gewisses Intervall zwischen -1 und $+1$ eingeschränkt, in welchem U positiv ist. Ein solches Intervall mufs stets vorhanden sein; wäre es nämlich nicht vorhanden, so müfsten wir sagen, dafs die in U eingehenden Integrationskonstanten n, N und h im Sinne der Mechanik unzulässig gewählt sind, weil ihnen keine reelle Bewegung entspricht. Die Grenzen unseres Intervalles werden durch zwei Punkte gebildet, in denen U verschwindet. Es seien dieses die Punkte $u = e$ und $u = e'$.

Aufser diesen beiden Wurzeln besitzt die Gleichung $U = 0$ noch eine dritte Wurzel, welche notwendig reell ist und aufserhalb des Intervalles -1 bis $+1$ liegt. Wir bezeichnen sie mit e''*) und zeigen leicht, dafs je nachdem $P >$ oder < 0 ist, $e'' > +1$ oder < -1 wird. In der That nimmt U bei unendlich grofsem u das Vorzeichen des in u höchsten Gliedes, also nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen das Vorzeichen von Pu^3 an. Dieses Vorzeichen ist im Falle $P > 0$ positiv für $u = +\infty$, im Falle $P < 0$ für $u = -\infty$; U wechselt also im ersteren Falle sein Vorzeichen zwischen $+\infty$ und $+1$, im

*) Weierstrass bezeichnet die drei Wurzeln des Ausdrucks dritten Grades unter dem Integralzeichen durchweg mit e_1, e_2, e_3. Wir haben die obige abweichende Bezeichnung gewählt, weil bei uns nicht die Weierstrassische Normierung des Integrales vorliegt.

letzteren zwischen $-\infty$ und -1. Die fragliche dritte Wurzel liegt also sicher auf unserer u-Axe und zwar im Falle $P>0$ rechterhand von $u=+1$, im Falle $P<0$ linkerhand von $u=-1$.

Wir müssen weiterhin zwischen den beiden Vorzeichen von $\sqrt{U}$ gut unterscheiden. Es ist deshalb bequem, statt der einfachen u-Axe eine *Doppelaxe* zu Grunde zu legen, oder, wie wir auch sagen können, die u-Axe *doppelt überdeckt* zu denken. Je zwei übereinanderliegende Punkte dieser Doppelaxe (vgl. Fig. 38) repräsentieren uns dann denselben Wert von u und U, aber entgegengesetzte Werte von $\sqrt{U}$. In den Verschwindungspunkten von U sind diese beiden entgegengesetzten Werte nicht verschieden. Dasselbe gilt von der Stelle $u=\pm\infty$, wo $\sqrt{U}$ die beiden funktionentheoretisch nicht verschiedenen Werte $\pm\infty$ annimmt. Wir bringen dieses in der Figur dadurch zum Ausdruck, dafs wir an diesen Stellen die beiden Überdeckungen der Axe in einen Punkt zusammenlaufen lassen. Die vier Punkte e, e', e'', ∞ bezeichnen wir auch, indem wir die übliche Terminologie der *Riemannschen Fläche* vorbereiten, als *Verzweigungspunkte*. Überhaupt entspricht die Mafsnahme der doppelten Überdeckung unserer u-Axe bereits dem von Riemann in die Funktionentheorie eingeführten Ideenkreise, dem wir aber erst im sechsten Kapitel näher treten können.

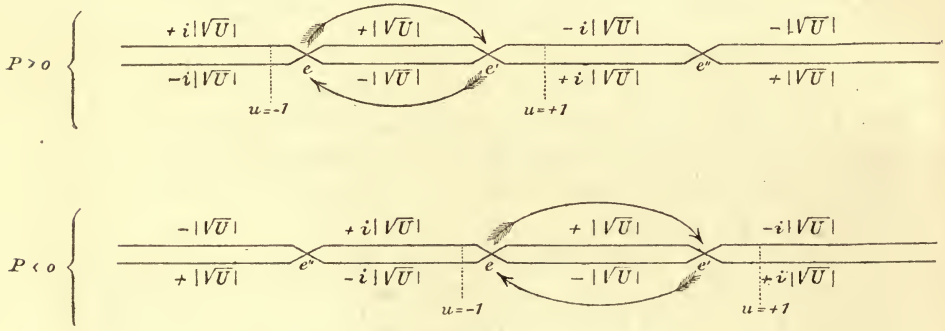


Fig. 38.

Wie wir im übrigen die positiven und negativen Werte der Quadratwurzel auf die beiden Überdeckungen verteilen, ist von dem hier eingenommenen Standpunkte der reellen Integrationsvariabeln aus bis zu einem gewissen Grade in unser Belieben gestellt. Natürlich werden wir die Wertefolge von $\sqrt{U}$ in den beiden Überdeckungen so einrichten, dafs sie eine stetige Folge wird, dafs also ein Vorzeichenwechsel nur in den Verzweigungspunkten ($U=0$ oder $U=\infty$) eintritt. Dabei bleibt in jedem der Intervalle ee', $e'e''$ u. s. w. noch je eine Vorzeichenwahl willkürlich. Erst später, wenn wir von komplexen

Werten der Gröfse u sprechen werden, wird sich auch hierfür eine bestimmte Regel ergeben. Vorläufig haben wir die in den vorstehenden Figuren enthaltene Vorzeichenbestimmung als eine willkürliche Festsetzung anzusehen.

Wir untersuchen jetzt das für t aufgestellte elliptische Integral in seiner Abhängigkeit von u etwas näher. Dabei benutzen wir die evidente Thatsache, dafs in der Mechanik die Zeit nicht nur eine reelle, sondern auch eine beständig wachsende Gröfse bedeutet, dafs also dt notwendigerweise positiv sein mufs.

Als untere Grenze des Integrales nehmen wir den kleineren der beiden zwischen -1 und $+1$ enthaltenen Wurzelwerte von $U=0$, welchen wir (wie in den Figuren) mit e bezeichnen. Von hier aus müssen wir u in das mechanisch allein brauchbare Intervall zwischen e und e' eintreten lassen und zwar, nach dem vorangestellten Prinzipe, in die obere Überdeckung dieses Intervalles, damit wir für

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

einen positiven Wert erhalten. Darauf haben wir u, beständig in der oberen Überdeckung bleibend, wachsen zu lassen bis zum Punkte $u=e'$. In diesem angekommen, müssen wir umkehren, damit dt reell, und wir müssen in die untere Überdeckung übergehen, damit dt positiv bleibt. Sind wir zu e zurückgelangt, so müssen wir aus demselben Grunde in die obere Überdeckung übergehen. Es wiederholt sich dann fortgesetzt dasselbe Spiel.

Der Weg, den wir der Variabeln u bei der Integration zuweisen müssen, besteht also aus der kontinuierlichen Umlaufung des Segmentes ee′ in bestimmtem Sinne.. (Vgl. die Pfeile in den vorstehenden Figuren.)

Dieser Satz liefert sofort eine erste wichtige Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung. Er besagt nämlich:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze oscilliert beständig zwischen zwei Parallelkreisen $\cos\vartheta = e$ *und* $\cos\vartheta = e'$ *auf der Einheitskugel hin und her.*

Zugleich lernen wir hierdurch die Lage der beiden Parallelkreise berechnen. Wir haben zu dem Zwecke die kubische Gleichung $U=0$ zu lösen; *ihre beiden zwischen* -1 *und* $+1$ *gelegenen Wurzeln liefern uns die fraglichen Werte von* $\cos\vartheta$.

Ferner können wir nunmehr die Zeit angeben, welche verstreicht, während die Kreiselspitze von ihrer tiefsten zu der nächstfolgenden höchsten Lage übergeht. Wir bezeichnen sie mit ω und haben

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{1}$$

e lowest positi

Ebenso grofs ist die Zeitdauer, in welcher die Kreiselspitze zu ihrer tiefsten Lage zurückgelangt; sie ist nämlich wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten negativen Vorzeichens von $\sqrt{U}$:

$$\int_{e'}^{e} \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \omega.$$

Während also u einen vollen Umlauf um das Integrationssegment ee' ausführt, vergeht jedesmal die Zeit 2ω. Hierauf beruht es, dafs man 2ω als die *Periode des elliptischen Integrals* bezeichnet ($\pi\varepsilon\varrho\acute{\iota}o\delta o\varsigma$ = Umlauf).

Auf dasselbe Zeitintervall 2ω kommen wir, wenn wir u, von *irgend* einem Werte des Integrationsintervalles beginnend, das Segment ee' umlaufen und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren lassen. Umgekehrt wird also auch zu je zwei Zeitpunkten, welche sich um 2ω oder um ein Vielfaches dieser Gröfse unterscheiden, derselbe Wert von u, d. h. dieselbe Vertikal-Erhebung der Kreiselspitze über die Äquatorebene der Einheitskugel gehören. *Die Bewegung der Kreiselspitze stellt daher, was ihre Vertikalkomponente betrifft, einen in der Zeit periodischen Vorgang dar.*

Dasselbe gilt aber auch von der Horizontal-Komponente dieser Bewegung. Letztere wird uns durch die wechselnden Werte des Winkels ψ bestimmt. Ursprünglich bedeutete ja ψ den von der x-Axe aus gemessenen Winkel nach der Knotenlinie. Die Knotenlinie aber steht auf der Figurenaxe und auch auf ihrer (orthographischen oder stereographischen) Projektion in der Äquatorebene beständig senkrecht. Da nun die Gröfse von ψ in unserer Integraldarstellung von pag. 223 sowieso nur bis auf eine additive Integrationskonstante definiert ist, so können wir, indem wir diese Konstante speziell wählen, ψ auch direkt auffassen als den Winkel, den die Projektion der Figurenaxe mit der x-Axe bildet. Die Gleichung

$$\psi = \psi(u),$$

in welcher die Funktion ψ das oben angegebene elliptische Integral bedeutet, liefert uns darauf direkt die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten. Wir haben nur noch nötig, u durch den von O aus gezählten Radius-Vektor ϱ des Bildes der Kreiselspitze auszudrücken, indem wir, je nachdem es sich um das orthographische oder das stereographische Bild handelt, setzen:

$$u = \sqrt{1-\varrho^2} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}.$$

Es ist nun klar, dafs das Integral $\psi = \psi(u)$ ganz ähnliche Periodicitätseigenschaften zeigen wird, wie das Integral für t, welches wir

soeben untersuchten. Zunächst haben wir den Weg der Variabeln u in unserem Integrale wegen des Faktors $\frac{du}{\sqrt{U}}$ und wegen seiner Bedeutung als Inkrement der Zeit ebenso zu bestimmen, wie oben geschehen. Gehen wir dementsprechend von der unteren Grenze e aus, so liefert die Integration, einmal bis zum Punkte e' ausgedehnt, denjenigen charakteristischen Zuwachs, welchen ψ während der Zeit ω erfährt. Wir bezeichnen denselben mit ψ_ω und haben

$$\psi_\omega = \int_e^{e'} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{2}$$

Das Doppelte dieses Zuwachses erhalten wir, wenn wir über den Punkt e' hinaus in der unteren Überdeckung weiter integrieren und zum Ausgangspunkte zurückkehren. In der That wird, wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten Vorzeichens von $\sqrt{U}$, wieder

$$\int_{e'}^{e} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \cdot \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \psi_\omega.$$

Derselbe Wert $2\psi_\omega$ ergiebt sich natürlich, wenn wir, in *irgend* einem Punkte unseres Segmentes beginnend, die Integrationsvariable dieses einmal vollständig umlaufen lassen. Die Gröfse $2\psi_\omega$ stellt daher denjenigen Zuwachs dar, welchen das Azimuth der Kreiselspitze erfährt, während diese von irgend einem Punkte aus nach Überschreitung einer höchsten und einer tiefsten Lage zu einem in gleicher Höhe über der Äquatorebene gelegenen Punkte zurückkehrt. Dieser Zuwachs ist mithin derselbe für alle Punkte der Bahnkurve. Mit anderen Worten:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze kommt mit sich zur Deckung, wenn wir sie um die Vertikale durch den Winkel $2\psi_\omega$ herumdrehen. Sie besteht daher aus einer (im allgemeinen unendlichen) Serie unter sich kongruenter Bögen, deren jeder in der Zeit 2ω durchlaufen wird. Die Bewegung der Kreiselspitze stellt, räumlich wie zeitlich betrachtet, einen periodischen Vorgang dar.

Die soeben ausgesprochene Kongruenz der einzelnen Kurvenbögen haben wir schon früher geometrisch erkannt; unsere jetzige analytische Ergänzung lehrt nun darüber hinaus, die Spannweite der Bögen mittelst der Gleichung (2) wirklich zu berechnen.

Wir wollen sodann analytisch verifizieren, was wir gleichfalls schon früher erkannt haben, dafs nämlich jeder Bogen der Bahnkurve in zwei symmetrisch gleiche Halbbögen zerfällt. Wir konstatieren zu dem Zwecke, dafs, unter u irgend einen Wert zwischen e und e' ver-

standen, die beiden Integrale

$$\int_u^{e'} d\psi \quad \text{und} \quad \int_{e'}^{u} d\psi,$$

von denen wir uns das erste in der oberen, das zweite in der unteren Überdeckung ausgeführt denken, denselben Wert (etwa ψ_0) haben. Nun gehören auf einem bestimmten unserer kongruenten Bögen zu dem Werte u je zwei Punkte, welche bez. die Azimuthe ψ_1 und ψ_2 haben mögen, wobei

$$\psi_1 = \psi_\omega - \psi_0, \qquad \psi_2 = \psi_\omega + \psi_0.$$

Wir sehen hieraus, dafs je zwei zu demselben u gehörige aufeinanderfolgende Punkte unseres Bahnkurvenbildes hinsichtlich der Geraden $\psi = \psi_\omega$ spiegelbildlich liegen. *Jeder einzelne unserer kongruenten Bögen zerfällt daher*, wie behauptet wurde, *in zwei spiegelbildlich gleiche Halbbögen.*

Schliefslich gelten genau dieselben Schlüsse auch hinsichtlich des Integrales, durch welches wir φ dargestellt haben. Wir können direkt sagen: Auch die φ-Koordinate nimmt bei einem vollen Umlauf der Variabeln u um das Integrationssegment je um eine bestimmte additive Gröfse $2\varphi_\omega$ zu. *Infolgedessen besitzt auch die Bewegung des Kreisels um die Figurenaxe einen periodischen Charakter. Diese Bewegung wiederholt sich in demselben Tempo, in dem sich die Bahnkurve periodisch reproduziert.* Die φ-Koordinate ist allerdings für den geometrischen Charakter der Bewegung weniger wichtig, wie die ψ-Koordinate; speziell kommt sie in unserer früheren graphischen Darstellung der Kreiselbewegung überhaupt nicht zum Ausdruck.

Wir haben unsere bisherige Diskussion an die Ausdrücke für die Eulerschen Winkel ψ und φ angeschlossen, welche auch in der That, wegen ihrer anschaulichen Bedeutung, bei geometrischen Fragen am bequemsten sind. Wir bemerken aber, dafs zum Zwecke einer eingehenden analytischen Behandlung unsere Parameter α, β, γ, δ entschieden den Vorzug verdienen. Dies wird im sechsten Kapitel klar hervortreten. Hier begnügen wir uns damit, aus den obigen Ausdrücken der t, ψ und φ entsprechende Integraldarstellungen für die Logarithmen unserer Parameter abzuleiten.

Wir knüpfen dabei an die ursprüngliche Definition der α, β, γ, δ in den Gleichungen (8) von pag. 21 an, wonach beispielsweise

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}$$

war. Wir berechnen nun $\lg \alpha$, indem wir für $\cos \frac{\vartheta}{2}$ seinen Wert in u, d. h. $\sqrt{\frac{u+1}{2}}$ eintragen und erhalten so:

$$\lg \alpha = \frac{1}{2} \lg (u+1) + \frac{i}{2} (\varphi + \psi) - \frac{1}{2} \lg 2.$$

Jetzt setzen wir für φ und ψ die Integrale von pag. 223 ein, schreiben auch $\lg (u+1)$ in ein Integral um und gestatten uns, die rechts stehende additive Konstante wegzuwerfen, indem wir sie mit der nicht hingeschriebenen willkürlichen Integrationskonstanten vereinigt denken. Nach gehöriger Zusammenziehung ergiebt sich für $\lg \alpha$ der folgende Ausdruck, dem wir sogleich die in entsprechender Weise gewonnenen Darstellungen für $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ hinzufügen:

$$(3) \quad \begin{cases} \lg \alpha = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \beta = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \gamma = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \delta = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases}$$

Zunächst möchte es scheinen, als ob diese Ausdrücke komplizierter sind, wie die Integraldarstellungen für φ und ψ. In Wirklichkeit zeigen sie aber ein viel einfacheres funktionentheoretisches Verhalten. Wir werden später sehen, dafs die Gröfsen $\lg \alpha$, $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ sogenannte Normalintegrale dritter Gattung sind, während sich die ψ und φ nur additiv aus solchen einfachsten Elementen zusammensetzen lassen.

§ 5. Über den Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel, welche dieselbe Impulskurve liefern, und über die Bewegung des Kugelkreisels.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, dafs wir uns, wie früher schon gelegentlich erwähnt wurde, fernerhin nur noch mit der Bewegung des Kugelkreisels zu befassen brauchen. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst eine etwas allgemeinere Überlegung an.

Wir betrachten einen bestimmten „ersten“ symmetrischen Kreisel und fassen die Kurve ins Auge, welche der Impuls-Endpunkt bei irgendeiner natürlichen Bewegung im Raume beschreibt. Darauf fragen wir uns: *Können wir diese Kurve in mehrfacher Weise als Impulskurve auffassen*, d. h. entsteht dieselbe Kurve als Ort der Endpunkte des

Impulsvektors im Raume etwa noch bei einer passend gewählten Bewegung eines „zweiten" symmetrischen Kreisels? Wir werden sehen, dafs diese Frage zu bejahen ist.

affirmativ

Die auf die Massenverteilung und die Bewegung unseres ersten und zweiten Kreisels bezüglichen Konstanten mögen durch den Index 1 und 2 unterschieden werden, so dafs also A_1, C_1, P_1 bez. A_2, C_2, P_2 die Trägheits- und Schweremomente des ersten bez. zweiten Kreisels bedeuten. Dabei wollen wir den zweiten Kreisel speziell so annehmen, dafs er dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment und dasselbe Drehmoment der Schwere aufweist, wie der erste Kreisel, dafs also

$$A_1 = A_2, \quad P_1 = P_2;$$

das Trägheitsmoment um die Figurenaxe kann dagegen verschieden sein. Ferner wollen wir die Anfangslage unseres zweiten Kreisels so bestimmen, dafs seine Figurenaxe mit der des ersten Kreisels zusammenfällt, dafs also zu Beginn der Bewegung

$$\vartheta_1 = \vartheta_2.$$

Endlich werden wir auch die Anfangslage und Gröfse des Impulses in beiden Fällen gleich bestimmen müssen, da wir ja erreichen wollen, dafs beide Kreisel zu derselben Impulskurve Anlafs geben. Wir werden also setzen

$$n_1 = n_2, \quad N_1 = N_2, \quad k_1 = k_2$$

und werden übrigens bei den hiernach als gleich vorausgesetzten Konstanten A, P, n, N, k die Indices fortlassen können.

Die oben gestellte Frage läfst sich nun, wenn wir uns auf unsere expliciten Integralformeln berufen wollen, äufserst leicht entscheiden. Wir brauchen nur zu bemerken, dafs der Ausdruck von U in Gleichung (7′) von pag. 222, ebenso wie die Formeln für t und ψ in den Gleichungen (8) von pag. 223, lediglich von den für beide Kreisel als gleich vorausgesetzten Impulsgröfsen n, N und k, sowie von A und P abhängen, dagegen von dem als verschieden vorausgesetzten Hauptträgheitsmomente C unabhängig sind. Infolgedessen werden t und ψ für beide Kreisel dieselben Funktionen von u, d. h. die Bahnkurve der Kreiselspitze wird nach ihrer räumlichen Gestalt und ihrer zeitlichen Durchlaufung bei beiden Kreiseln identisch. Dafs alsdann auch die Impulskurven identisch werden, ergiebt sich direkt aus der Gleichheit der Impulskomponenten n und N, sowie aus der Gleichheit der Länge des Impulses, welche bei entsprechend gleichen Werten von $\cos\vartheta$ durch den Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 ausgesprochen wird.

Unsere obige Frage ist daher in folgendem Sinne zu beantworten: *Zu einer bestimmten möglichen Impulskurve gehören unendlich viele mit*

demselben Anfangsimpuls und derselben Anfangslage der Figurenaxe vor sich gehenden Bewegungen aller derjenigen symmetrischen Kreisel hinzu, welche dasselbe Drehmoment der Schwere und dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment besitzen. Zugleich mit der Impulskurve wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze bei allen solchen Bewegungen identisch.

Wir können uns aber auch unmittelbar geometrisch von diesem eigentümlichen Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel Rechenschaft geben

Wir vergleichen zu dem Zwecke den Verlauf der Impulskurve bei unserem ersten und zweiten Kreisel, indem wir den Anfangsimpuls successive mit dem unendlich kleinen Drehstofse der Schwere zusammensetzen. Dabei ergiebt sich wegen der Gleichheit von P und wegen der Gleichheit des Anfangsimpulses und der Anfangslage der Figurenaxe im ersten Momente für beide Kreisel dieselbe Änderung des Impulses. Insbesondere, können wir sagen, behält die Differenz $|i_1|^2 - |i_2|^2$ zunächst ihren Anfangswert Null bei oder, genauer gesagt, der Differentialquotient dieser Differenz nach der Zeit ist in der Anfangslage gleich Null.

Wir berücksichtigen ferner, dafs zwischen der Länge des Impulses und der Neigung der Figurenaxe für die Bewegung beider Kreisel die unveränderliche Relation (3) von pag. 219 besteht:

$$|i_1|^2 + 2AP\cos\vartheta_1 = k, \quad |i_2|^2 + 2AP\cos\vartheta_2 = k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen schliefsen wir, dafs die Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale sich anfangs in beiden Fällen in gleicher Weise ändert. Bilden wir nämlich die Differenz der vorstehenden Gleichungen, so folgt durch Differentiation nach t:

$$2AP\frac{d}{dt}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) = -\frac{d}{dt}(|i_1|^2 - |i_2|^2) = 0.$$

Nehmen wir zu der Gleichheit des Neigungswinkels ϑ im ersten Moment noch die Gleichheit der Projektion N des Impulsvektors auf die Figurenaxe hinzu, so ergiebt sich mit Notwendigkeit, dafs die anfangs vereinigt gelegenen Figurenaxen zunächst vereinigt bleiben.

Wir sind damit auf dieselben Bedingungen, die zu Anfang der beiden Bewegungen galten, zurückgeführt. Durch Wiederholung unseres Schlusses sehen wir daher, dafs je zwei symmetrische Kreisel, welche dieselbe Anfangslage der Figurenaxe und denselben Anfangsimpuls besitzen, bei gleichen Werten von A und P dauernd denselben Impuls und dieselbe Lage der Figurenaxe aufweisen müssen. Dies ist aber wieder der oben ausgesprochene Satz.

Je zwei der hier verglichenen Bewegungen sind natürlich nicht völlig identisch. Sie unterscheiden sich beispielsweise durch die Gestalt der Herpolhodiekurve, wie wir unten noch näher ausführen werden. Offenbar fällt nämlich bei gleicher Impulskurve und gleicher Bahnkurve der Kreiselspitze, aber ungleichen Werten des Hauptträgheitsmomentes C Lage und Gröfse des Rotationsvektors verschieden aus. Diese Verschiedenheit der instantanen Drehung kann aber nur in der bez. Bewegung der beiden Kreisel um die Figurenaxe, d. h. in den Werten des Winkels φ, zum Ausdrucke kommen, da ja die Bewegung der Figurenaxe selbst, wie wir sahen, dieselbe sein mufs. In der That kommt denn auch C in der Integralformel für φ (s. Gl. (8) von pag. 223) explicite vor.

Nach derselben Gleichung können wir aber sagen, dafs

$$\varphi - N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) t \tag{1}$$

für je zwei Kreisel unserer Serie dauernd denselben Wert besitzt. Es differieren also die Rotationskomponenten φ' bei zwei solchen Kreiseln nur je um einen konstanten Betrag, dessen Gröfse von der Verschiedenheit der Trägheitsmomente C abhängt.

Insbesondere findet sich unter der Serie unserer mit gleicher Impuls- und Bahnkurve ausgestatteten Kreisel ein *Kugelkreisel*. Diesen werden wir mit Vorliebe, wenn irgend ein „erster" symmetrischer Kreisel gegeben ist, zum Vergleich heranziehen. Sein Trägheitsmoment, welches wir mit A bezeichnen, haben wir nach dem Vorstehenden so zu bestimmen, dafs $A = A_1$.

Nehmen wir ferner die Gröfsen P, n, N, k, sowie die Anfangslage der Figurenaxe den entsprechenden Gröfsen des vorgelegten symmetrischen Kreisels bez. gleich, so sind wir sicher, dafs die Bahnkurve des Kugelkreisels mit der des symmetrischen Kreisels identisch wird, während sich gleichzeitig die beiden Winkelgeschwindigkeiten φ' nur um eine konstante Gröfse unterscheiden. *Kugelkreisel und symmetrischer Kreisel sind also für unsere Zwecke nicht wesentlich von einander verschieden.* Hat man die Bewegung des ersteren allgemein behandelt, so läfst sich die Bewegung des letzteren sofort angeben.

Die Möglichkeit der Reduktion des allgemeinen Kreiselproblems auf den Kugelkreisel ist zuerst von Herrn Darboux*) bemerkt worden.

Eine erste Anwendung, welche wir von dieser Reduktion machen, soll darin bestehen, dafs wir über die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels einen schon pag. 218 erwähnten Satz beweisen. Wir wollen

*) Mouvement d'un corps pesant de révolution, Journ. de Liouville, sér. IV, t. 1, 1885.

zeigen: *Die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels ist eine sphärische Kurve.*

Wir gehen dabei von der Thatsache aus, dafs die Herpolhodiekurve des zugehörigen Kugelkreisels *eben* ist. In der That wird ja beim Kugelkreisel die Herpolhodiekurve der Impulskurve, d. h. derjenigen Kurve, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Raume beschreibt, ähnlich. Dafs aber letztere eine ebene Kurve ist, wurde pag. 216 ausführlich dargethan.

Die Koordinaten der Herpolhodiekurve, welche wir wie früher mit π, $\varkappa$, ϱ bezeichnen, haben wir pag. 45 durch die Werte von φ, ψ, ϑ und ihre Differentialquotienten dargestellt; insbesondere ergab sich für die dritte Koordinate:

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi'.$$

Nun hat ϱ beim Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A den konstanten Wert $\frac{n}{A}$. Ferner sind die Werte von ψ und ϑ beim symmetrischen Kreisel, wie wir eben sahen, den entsprechenden Werten bei dem zugehörigen Kugelkreisel bez. gleich, während sich nach (1) die Winkelgeschwindigkeit φ' beim symmetrischen Kreisel aus der entsprechenden Gröfse beim Kugelkreisel durch Hinzufügung von $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ berechnet. Wir haben daher, unter φ' den Wert dieser Winkelgeschwindigkeit beim Kugelkreisel, unter ϱ den Wert der dritten Herpolhodiekoordinate beim symmetrischen Kreisel verstanden:

$$\frac{n}{A} = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi',$$

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi' + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta$$

oder

$$\varrho = \frac{n}{A} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta. \tag{2}$$

Wir drücken ferner die Länge des Drehungsvektors bei der Bewegung des symmetrischen Kreisels einmal durch seine Koordinaten π, $\varkappa$, ϱ, das andere Mal durch die Koordinaten p, q, r aus, wobei wir statt r auch schreiben können $\frac{N}{C}$. So erhalten wir:

$$\pi^2 + \varkappa^2 + \varrho^2 = p^2 + q^2 + \frac{N^2}{C^2}. \tag{3}$$

Der Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 gestattet uns sodann $p^2 + q^2$ noch in anderer Weise zu berechnen. Setzen wir nämlich in der genannten Gleichung

$$|i|^2 = L^2 + M^2 + N^2 = A^2(p^2 + q^2) + N^2,$$

so ergiebt sich:

$$A^2(p^2+q^2)+N^2+2AP\cos\vartheta = k$$

oder

$$p^2+q^2 = \frac{k-N^2-2AP\cos\vartheta}{A^2}.$$

Gleichung (3) geht mithin über in

$$(4)\qquad \pi^2+\varkappa^2+\varrho^2 = \frac{k-2AP\cos\vartheta}{A^2}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Schliefslich eliminieren wir $\cos\vartheta$ aus (2) und (4) und finden eine Gleichung, in der aufser π, $\varkappa$, ϱ nurmehr konstante Gröfsen vorkommen, nämlich:

$$(5)\qquad \pi^2+\varkappa^2+\varrho^2 = \frac{k}{A^2}-\frac{2CP(A\varrho-n)}{AN(A-C)}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right)$$

oder

$$(5')\quad \pi^2+\varkappa^2+\left(\varrho+\frac{CP}{N(A-C)}\right)^2 = \frac{k}{A^2}+\frac{2CPn}{AN(A-C)}+\frac{C^2P^2}{N^2(A-C)^2}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kugel. Ihr Mittelpunkt liegt auf der Vertikalen im Abstande $\frac{CP}{N(A-C)}$ vom Unterstützungspunkte; ihr Radius ist gleich der Quadratwurzel aus der rechten Seite in (5'). *Die Herpolhodiekurve ist also in der That eine sphärische Kurve.*

Die Verschiedenheit der Herpolhodiekurve für verschiedene Kreisel unserer Serie folgt auch unmittelbar daraus, dafs Lage und Gröfse der Kugel von dem Trägheitsmomente C abhängen. Speziell wird für den in unserer Serie enthaltenen Kugelkreisel wegen des Nenners $A-C$ der Radius unendlich grofs; gleichzeitig rückt sein Mittelpunkt ins Unendliche. Die sphärische Kurve geht also für diesen Spezialfall in eine ebene Kurve über, wie es sein mufs.

Die Einführung des Kugelkreisels empfiehlt sich namentlich auch wegen eines eigentümlichen *Reciprocitätsgesetzes*, welches für die Bewegung des Kugelkreisels Platz greift. Wir behaupten:

Die umgekehrte Bewegung, d. h. die relative Drehung des Raumes gegen den als fest gedachten Kreisel, ist beim Kugelkreisel wieder eine Kreiselbewegung.

Geometrisch sehen wir die Richtigkeit dieses Satzes ein, wenn wir uns im Einzelnen überlegen, dafs bei der direkten Bewegung des Kugelkreisels Figurenaxe und Vertikale dieselbe Rolle spielen, wie bei der umgekehrten Bewegung Vertikale und Figurenaxe oder, genauer gesagt, wie die zur Vertikalen und zur Figurenaxe diametralen Halbstrahlen.

Der analytische Beweis besteht in Folgendem: Wir setzen in den Gleichungen (7′) und (8) von pag. 222, 223 $C = A$ und vertauschen n mit $-N$ und N mit $-n$, was einer Vertauschung der Vertikalen mit dem zur Figurenaxe diametralen Halbstrahle u. s. w entspricht, während wir unsere dritte Integrationskonstante k ungeändert lassen. Alsdann bleibt der Ausdruck U und mithin auch die Funktion t von u ungeändert. Gleichzeitig geht ψ in $-\varphi$ und φ in $-\psi$ über. Wir wissen aber aus dem ersten Kapitel (s. pag. 30, 31), dafs die Umänderung von ϑ, ψ, φ in ϑ, $-\varphi$, $-\psi$ dem Übergange von der direkten zu der umgekehrten Drehung entspricht. Die umgekehrte Bewegung ist also in der That wieder eine Kreiselbewegung; sie ist durch die wesentlichen Konstanten $-N$, $-n$, k charakterisiert, wenn die entsprechenden Konstanten der direkten Bewegung n, N, k lauten.

Dieses Reciprocitätsgesetz ist natürlich nur durch die besonderen Symmetrieverhältnisse des Kugelkreisels bedingt. Bei allgemeineren Systemen hat die umgekehrte Bewegung einen ganz anderen kinetischen Charakter wie die direkte, worauf bereits pag. 12 hingewiesen. Schon bei dem symmetrischen Kreisel verliert unser Reciprocitätsgesetz seine Gültigkeit, weil in diesem Falle bei der Konstruktion des Drehungsvektors aus dem Impulsvektor die Figurenaxe und die Vertikale nicht gleichberechtigt auftreten. Analytisch kommt dieses darin zum Ausdrucke, dafs in dem Ausdrucke von φ in Gleichung (8) von pag. 223 das Glied

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t$$

auftritt, welches bei der Vertauschung von n, N mit $-N$, $-n$ nicht ungeändert bleibt.

Wir werden später aus dem somit festgestellten Reciprocitätsgesetze des Kugelkreisels einen namhaften Vorteil bei der Berechnung unserer Impulskurven bez. unserer Polhodie- und Herpolhodiekurven ziehen. Wenn wir nämlich etwa die Polhodiekurve oder, was beim Kugelkreisel auf dasselbe herauskommt, die „zweite Impulskurve“ irgendwie gefunden haben, so können wir die Gleichungen der Herpolhodiekurve oder die der „ersten Impulskurve“ unmittelbar herstellen. Es liegt nämlich, wie pag. 14 bemerkt, die Polhodiekurve der direkten Bewegung hinsichtlich des Unterstützungspunktes diametral zur Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung. Aus der Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung entsteht aber die Herpolhodiekurve der direkten auf Grund unseres Reciprocitätsgesetzes durch Vertauschung von n, N mit $-N$, $-n$. Mithin können wir folgende Regel zur Ableitung der Herpolhodiekurve aus der als bekannt vorausgesetzten Polhodiekurve aussprechen:

Man kehre die Koordinaten p, q, r der Polhodiekurve, welche als Funktionen der Zeit und der Integrationskonstanten n, N und k gefunden sein mögen, im Vorzeichen um und schreibe $-N$, $-n$ an Stelle von n, N. Dann gehen die Koordinaten p, q, r der Polhodiekurve in die Koordinaten π, $\varkappa$, ϱ der Herpolhodiekurve über. In derselben Weise ergeben sich aus den Koordinaten L, M, N der zweiten Impulskurve die Koordinaten l, m, n der ersten.

Wir stellen hierunter die wichtigsten der bisher gewonnenen Formeln für den Spezialfall des Kugelkreisels zum leichteren Gebrauch zusammen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) von pag. 222 folgt für einen Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A:

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \varphi' = \frac{N - nu}{A(1-u^2)}, \quad u = \cos\vartheta; \tag{6}$$

die Gleichungen (8) von pag. 223 gehen über in

$$\begin{cases} t = \int \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi = \int \dfrac{n - Nu}{A(1-u^2)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi = \int \dfrac{N - nu}{A(1-u^2)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \end{cases} \tag{7}$$

$$A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2); \tag{7'}$$

die Integraldarstellungen der α, β, γ, δ endlich lauten jetzt nach pag. 231:

$$\begin{cases} \lg\alpha = \int \dfrac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\beta = \int \dfrac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\gamma = \int \dfrac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\delta = \int \dfrac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} \dfrac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases} \tag{8}$$

Der Übergang zu einem symmetrischen Kreisel vom Trägheitsmomente $C \gtrless A$ wird hinterher einfach dadurch bewerkstelligt, daſs wir den vorstehenden Werten von φ bez. $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$, $\lg\delta$ den Term

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \text{ bez. } \pm\frac{i}{2} N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \tag{9}$$

hinzufügen.

§ 6. Kontrolle der in den ersten Paragraphen entwickelten Bewegungsformen des Kugelkreisels; die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $e = 0$.

Nachdem wir im vierten Paragraphen die allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung festgestellt und damit eine erste Kontrolle für die anschaulichen Entwickelungen der ersten Paragraphen erhalten haben, wollen wir nun eine detailliertere Einsicht in die Gestalt der Bahnkurven zu gewinnen suchen, soweit dieses auf analytisch-algebraischem Wege ohne ein näheres Eingehen auf die Theorie der elliptischen Integrale möglich ist. Wir werden zu dem Zwecke untersuchen, wie die Gestalt der Bahnkurven von den Konstanten n, N und k abhängt. Dabei können wir uns nach dem vorigen Paragraphen auf den Fall eines Kugelkreisels, dessen Trägheitsmoment wir mit A bezeichnen, beschränken.

Zunächst wollen wir in der Wahl der Integrationskonstanten eine Änderung vornehmen. Wir wollen nämlich statt der Konstanten k, welche keine hinreichend einfache geometrische Bedeutung hat und welche überdies, damit die zugehörige Bewegung reell ausfällt, gewissen ziemlich komplizierten Ungleichungen zu unterwerfen ist, eine neue Konstante einführen, welche uns die Anfangslage der Figurenaxe gegen die Vertikale angiebt. Und zwar wählen wir die Anfangszeit, von der aus wir die Bewegung verfolgen, wie bereits pag. 199 verabredet, so dafs in ihr die Kreiselspitze einen höchsten oder tiefsten Punkt ihrer Bahnkurve auf der Einheitskugel einnimmt. Die Anfangsneigung (ϑ_0) der Figurenaxe ist alsdann nach pag. 227 bestimmt durch eine der zwischen -1 und $+1$ gelegenen Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$. Bezeichnen wir diese Wurzel mit e, so haben wir $\cos\vartheta_0 = e$.

Wir können nun die Konstante k aus U eliminieren und statt ihrer e einführen. Dies geschieht folgendermafsen. Nach der Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen haben wir:

$$\frac{A^2 U}{1-u^2} = -\frac{(Nu-n)^2}{1-u^2} + k - N^2 - 2APu.$$

Setzen wir $u = e$, so soll die linke Seite verschwinden; es besteht also die weitere Gleichung:

$$0 = -\frac{(Ne-n)^2}{1-e^2} + k - N^2 - 2APe.$$

Nehmen wir die Differenz der beiden Gleichungen, so ergiebt sich als Resultat der Elimination von k:

$$A^2 U = -(Nu-n)^2 + \frac{(Ne-n)^2(1-u^2)}{1-e^2} - 2AP(u-e)(1-u^2).$$

$(Ne-n)^2$ is same as $(-Ne+n)^2$ in our problem

Da die rechte Seite für $u = e$ verschwinden muſs, so können wir $u - e$ als Faktor herausziehen. Wir setzen dementsprechend, indem wir auf gleichen Nenner bringen:

$$(1) \qquad U = \frac{u - e}{A^2(1 - e^2)} U_1,$$

wo U_1, wie man leicht nachrechnet, folgenden Wert hat:

$$(2) \quad U_1 = -(u + e)(n^2 + N^2) + 2Nn(1 + eu) - 2AP(1 - e^2)(1 - u^2).$$

Indem wir so eine der Wurzeln unserer kubischen Gleichung $U = 0$ als vorgegeben ansehen (indem wir, wie man sich ausdrückt, diese Wurzel adjungieren), hängt die Bestimmung der übrigen nur noch von einer quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ ab. Von ihren beiden Wurzeln bestimmt uns diejenige, welche zwischen -1 und $+1$ gelegen ist, den anderen Parallelkreis $u = e'$, welcher zusammen mit dem bekannten Parallelkreise $u = e$ die Bahnkurve der Kreiselspitze auf der Einheitskugel eingrenzt.

Die Einführung der Konstanten e bringt also einen doppelten Vorteil mit sich: 1) wird die wenig anschauliche Konstante k durch eine Gröfse ersetzt, welche in der Anfangslage der Figurenaxe und in der Gestalt der Bahnkurve unmittelbar zum Ausdruck kommt, 2) wird die kubische Gleichung $U = 0$ durch eine leicht lösbare quadratische Gleichung $U_1 = 0$ ersetzt. Wir werden daher im Folgenden n, N und e als die wesentlichen Elemente der Kreiselbewegung ansehen und gelegentlich als Integrationskonstanten bezeichnen.

Indem wir nun zu einer genaueren Untersuchung der Bahnkurvengestalten übergehen, werden wir vor allem zu wissen wünschen, wie die Lage des zweiten Begrenzungskreises $u = e'$ von der Wahl der Integrationskonstanten abhängt. Da es unsere nächste Absicht ist, die Serie der Figuren 24 bis 35 einer näheren Kontrolle zu unterziehen, nehmen wir, wie im ersten Paragraphen, durchweg an, dafs die Figurenaxe anfangs horizontal steht, und setzen dementsprechend für's erste $e = 0$.

In den Figuren 24 bis 28 hatte n den festen Wert null, während N variirt wurde. Setzen wir also $e = n = 0$ und etwa $N = v$, so stellt uns die Gleichung $U_1 = 0$ die fragliche Abhängigkeit zwischen u und v, d. h. zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und der Gröfse des Eigenimpulses $v = N$ dar. Diese Gleichung lautet jetzt folgendermafsen:

$$(3) \qquad uv^2 = -2AP(1 - u^2).$$

Während sie in u vom zweiten Grade ist, erhöht sich ihr Grad wieder

auf 3, sobald wir, wie es jetzt geschehen muſs, u und v gleichzeitig als Variabele ansehen. Um die Abhängigkeit zwischen diesen Gröſsen bequem übersehen zu können, deuten wir sie als rechtwinklige Koordinaten in einer uv-Ebene, u als Abscisse, v als Ordinate und erhalten so als Bild der Gleichung $U_1 = 0$ *eine Kurve dritter Ordnung* („eine C_3“).

Die Gestalt dieser C_3 ist leicht zu übersehen. Zu jeder Abscisse u gehört ein Paar entgegengesetzt gleicher (nicht notwendig reeller) Werte $\pm v$; die Gerade $u = \text{const.}$ schneidet also die Kurve in zwei zur Abscissenaxe spiegelbildlich gelegenen Punkten; die Kurve selbst liegt zu dieser Axe symmetrisch. Zusammenrücken können zwei solche Punkte nur, wenn $\pm v = 0$ oder $= \infty$ wird, in welchem Falle die betr. Gerade $u = \text{const.}$ unsere C_3 berührt. Nun haben wir nach Gleichung (3) $v = 0$, wenn $u = \pm 1$, und $v = \infty$, wenn $u = 0$ oder $= \infty$ wird. Unsere Kurve besitzt hiernach in den Punkten $u = \pm 1$, $v = 0$ je eine vertikale Tangente und hat die Ordinatenaxe zur Asymptote.

Bemerken wir ferner, daſs rechts von der Ordinatenaxe die linke Seite unserer Gleichung (3) positiv ist. Die rechte Seite ist aber, da wir wie in § 1 $P < 0$ voraussetzen wollen, nur solange positiv, als $u < 1$ ist. Infolgedessen giebt es rechts von der Geraden $u = +1$ keine reellen Kurvenpunkte. In entsprechender Weise sieht man, daſs innerhalb des Streifens links von der Ordinatenaxe und rechts von Geraden $u = -1$ keine Kurvenpunkte liegen können. Die Kurve muſs daher (vgl. Fig. 39) an der Stelle $u = +1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein und wird sich von hier aus der Geraden $u = 0$ asymptotisch nähern. Desgleichen wird die Kurve an der Stelle $u = -1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein, von wo aus sie parabelähnlich ins Unendliche verläuft. Unsere C_3 besteht also aus zwei getrennten Zügen, welche wir als „paaren“ und „unpaaren“ Zug unter-

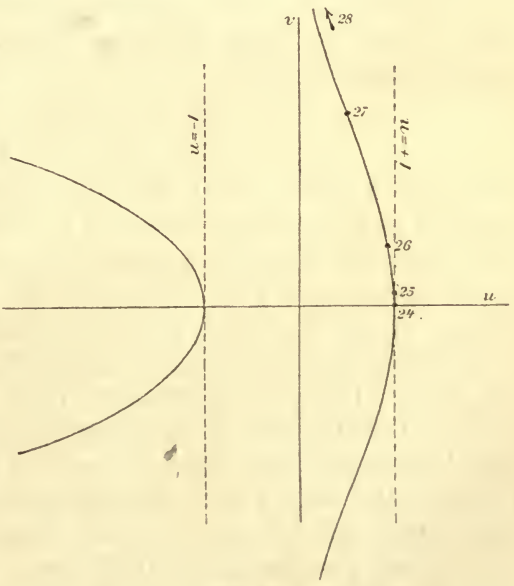


Fig. 39.

scheiden. Der unpaare Zug ist der in dem Streifen $0 < u < 1$ enthaltene, der paare Zug ist unser parabelähnlicher Ast.

Auf Grund dieser Figur können wir unsere früheren Schlüsse über die Abänderung des Parallelkreises $u = e'$ bei wachsendem N vollkommen bestätigen. Natürlich kommen für die Mechanik nur solche Abscissenwerte v in Betracht, welche zwischen -1 und $+1$ enthalten sind. Sehen wir also von dem isolierten Punkte $u = -1$ ab, welchem, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, eine ganz besondere Art der Bewegung entspricht, so haben wir uns mit dem unpaaren Zuge zu beschäftigen. Wir ziehen die Parallele zur u-Axe $v = N$ und lassen N von Null aus wachsen. Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit dem unpaaren Zuge giebt uns den zu N gehörigen Wert von e'. Dem Falle $N = 0$ entspricht die gewöhnliche Pendelbewegung, bei der $e' = 1$ ist, bei der sich also der Parallelkreis e' auf den Nordpol der Einheitskugel reduziert. Bei wachsendem N nimmt e', wie die Figur zeigt, successive ab, unser Parallelkreis erweitert sich also und nähert sich für $N = \infty$ asymptotisch dem Äquator. Die Bewegung geht dabei, in Übereinstimmung mit Fig. 28, in unsere pseudoreguläre Präcession über.

Wir verifizieren auch leicht das Auftreten von Spitzen in den Figuren 25 bis 28. Nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen haben wir im Falle $n = 0$:

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{-Nu}{A^2(1-u^2)} \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

Auf dem Äquator $u = 0$ wird die rechte Seite null, weil $\sqrt{U}$ von niederer Ordnung verschwindet wie u. Hier mufs also die Bahnkurve im stereographischen Bilde radial verlaufen; da sie aber den Äquator nicht überschreiten kann, mufs sie auch in radialer Richtung zurücklaufen, so dafs sie in der That eine Spitze bildet.

Hieran mögen sich einige Angaben über die den Figuren 25 bis 28 zu Grunde liegenden numerischen Werte schliefsen, soweit sie sich auf die Lage der begrenzenden Parallelkreise beziehen. Wir haben bei der Herstellung dieser Figuren $A = 1$, $P = -1$ angenommen, Werte, welche sich übrigens durch Wahl geeigneter Einheiten für die Messung von Länge und Zeit stets erreichen lassen. Die numerischen Werte von N und die zugehörigen Werte von e' werden durch die folgende Tabelle geliefert bez. durch unsere obige Kurve, in welcher die Nummern der betr. Figuren an den repräsentierenden Stellen (u, v) des unpaaren Zuges eingetragen sind.

Fig. 24	$e' = 1$	$N = 0$
„ 25	$\frac{99}{100}$	$\sqrt{\frac{398}{9900}} = 0{,}20$
„ 26	$\frac{9}{10}$	$\sqrt{\frac{19}{45}} = 0{,}65$
„ 27	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1{,}73$
„ 28	0	∞

Bei einem negativen Werte von N ergiebt sich, wegen der symmetrischen Lage unserer C_3 gegen die Abscissenaxe, genau dieselbe Gröfse des Parallelkreises und dieselbe Bahnkurve wie bei positivem N, was übrigens auch mechanisch evident ist. Insoweit war also die im ersten Paragraphen festgehaltene Beschränkung auf positive Werte von N wohlbegründet.

Unsere bisherigen Betrachtungen geben uns gleichzeitig Aufschlufs über die Bewegung des Kugelkreisels im Falle $N = 0$ bei variablem n. In der That bestimmt sich nach Gleichung (2) — in Übereinstimmung mit dem Reciprocitätsgesetz des vorigen Paragraphen — die Lage des Parallelkreises in diesem Falle wiederum durch die Gleichung (3) bez. durch unsere Fig. 39, in welcher alsdann v die Impulskomponente n bedeuten wird. Wir haben diese durch $N = 0$ charakterisierten Bahnkurven des Kugelkreisels als Bahnkurven des sphärischen Pendels bezeichnet. Wir können diese Bezeichnung nachträglich auf Grund des vorigen Paragraphen rechtfertigen.

Ein Pendel ist allerdings kein Kugelkreisel, sondern ein symmetrischer Kreisel von spezieller Beschaffenheit. Es ist nämlich bei diesem das Trägheitsmoment um die Figurenaxe, d. h. um die Axe des Stabes, an dessen Ende der Massenpunkt befestigt ist, gleich null, während das Trägheitsmoment um eine dazu senkrechte Axe gleich ml^2 ist, wo m die Masse des Punktes, l die Länge des Stabes bedeutet. Gleichzeitig mit dem Trägheitsmoment um die Figurenaxe ist natürlich auch der Eigenimpuls des Pendels notwendig gleich null. Nun sahen wir aber, dafs ein symmetrischer Kreisel dieselbe Bahnkurve beschreibt, wie ein Kugelkreisel von gleichem Schwere- und äquatorialem Trägheitsmoment und gleichen Impulskonstanten N, n, k. Infolgedessen sind wirklich im Falle $N = 0$ die Bahnkurven unseres Kugelkreisels zugleich Bahnkurven eines gewissen sphärischen Pendels.

Wir wollen hiermit die in dem Schema 36 auf den Axen $n = 0$ bezw. $N = 0$ gelegenen Figuren als erledigt ansehen und wenden uns nun zu den Fällen, wo keine unserer beiden Impulskomponenten n, N verschwindet, insbesondere also zu den Figuren 29 bis 35.

In diesen Figuren haben wir den Wert von N festgehalten und den von n variiert. Wir wollen dementsprechend in Gleichung (2) $n = v$ und übrigens wie früher $e = 0$ setzen. Alsdann wird die gegenseitige Abhängigkeit zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und dem seitlichen Anstofse $v = n$ durch die Gleichung gegeben:

$$u(v^2 + N^2) - 2Nv + 2AP(1 - u^2) = 0, \tag{4}$$

welche uns wieder eine *Kurve dritter Ordnung* repräsentiert.

Um ihre Gestalt zu bestimmen, suchen wir wie oben die vertikalen Tangenten auf. Zwei derselben haben die Gleichung $u = \pm 1$; in der That schneiden diese Geraden unsere C_3 in zwei zusammenfallenden Punkten, da sich für $u = \pm 1$ die Gleichung (4) auf

$$(v \mp N)^2 = 0$$

reduziert. Die Berührungspunkte liegen hiernach an den Stellen $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Aufser diesen zwei (zusammenfallenden) Schnittpunkten müssen aber die Geraden $u = \pm 1$ mit unserer C_3 noch einen dritten Schnittpunkt haben, welcher nur im Unendlichen liegen kann. Die Kurve erstreckt sich also in vertikaler Richtung ins Unendliche. Asymptote wird die Gerade $u = 0$. Tragen wir nämlich diesen Wert in (4) ein, so ergiebt sich nur ein zugehöriger Ordinatenwert

$$v_1 = \frac{AP}{N}.$$

Die Gerade $u = 0$ mufs daher die C_3 im Unendlichen berühren.

Wir fragen sodann, ob es aufser den gefundenen drei noch weitere vertikale Tangenten giebt. Das allgemeine Kriterium für das Auftreten vertikaler Tangenten wird dieses sein, dafs die Gleichung $U_1 = 0$, als Gleichung in v aufgefafst, eine Doppelwurzel ergiebt, wenn für u der betr. Abscissenwert einer vertikalen Tangente eingetragen wird. In v ist die Gleichung $U_1 = 0$ quadratisch. Die Bedingung für das Auftreten einer Doppelwurzel bei der quadratischen Gleichung $av^2 + 2bv + c = 0$ wird aber durch Nullsetzen der Discriminante $ac - b^2$ geliefert. Die Ausrechnung dieser Bedingung giebt in unserem Falle:

$$(1 - u^2)(N^2 - 2APu) = 0.$$

Wir sehen also, dafs aufser den Geraden $u = \pm 1$ auch

$$u_2 = \frac{N^2}{2AP}$$

eine vertikale Tangente ist. Ihr Berührungspunkt hat die Ordinate

$$v_2 = -\frac{b}{a} = \frac{N}{u_2} = \frac{2AP}{N}.$$

Es kommt nun wesentlich auf die Lage dieser Tangente gegen die vorher gefundenen an. Jedenfalls liegt sie, da wir $P < 0$ voraussetzen,

linkerhand von der Asymptote $u = 0$. Es fragt sich aber ferner, ob sie auch links oder rechts von der Tangente $u = -1$ verläuft. Da es uns hier nur auf eine Kontrolle der Figuren des ersten Paragraphen ankommt, legen wir die pag. 242, 243 genannten Zahlenwerte $A = -P = 1$, $N = 0{,}20$ zugrunde und behalten uns vor, im folgenden Paragraphen die Gestalt der C_3 unter allgemeineren Annahmen zu untersuchen. Der numerische Wert der Abscisse unserer vierten Tangente wird daraufhin

$$u_2 = -0{,}02 > -1.$$

Wir können jetzt in das von unseren vier vertikalen Tangenten gebildete Gerüst die Kurve dritter Ordnung eintragen. Beginnen wir die Zeichnung im Punkte $u = 1$, $v = N$. Die Kurve verläuft hier vertikal und nähert sich nach oben hin asymptotisch der Ordinatenaxe. Setzen wir sie nach unten hin fort, so überschreitet sie die Ordinatenaxe im Punkte $u = 0$, $v = v_1$, berührt die Gerade $u = u_2$ im Punkte $v = v_2$ und nähert sich dann asymptotisch der negativen Ordinatenaxe. Aufserdem setzt sich im Punkte $u = -1$, $v = -N$ ein zweiter parabelähnlicher Kurvenast an. Die Kurve besteht also wieder aus einem „paaren" und einem „unpaaren" Zuge von vertikaler Erstreckung, welcher letzterer mechanisch allein wichtig ist. Übrigens haben wir in der Zeichnung (vgl. Fig. 40) wegen des ziemlich kleinen Wertes von N ($N = 0{,}20$) die Mafseinheit auf der Vertikalen fünfmal so klein wählen müssen, wie auf der Horizontalen.

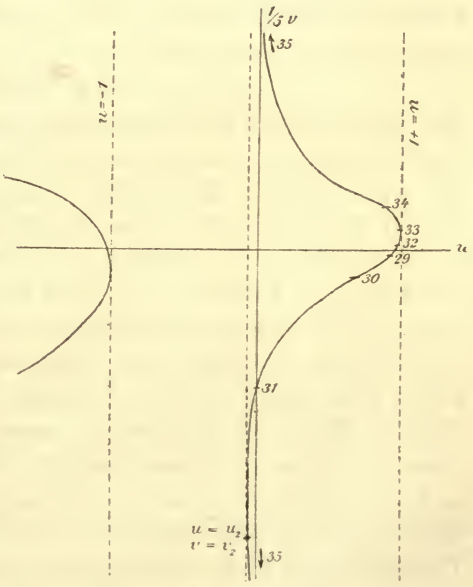


Fig. 40.

Wir haben nun in dieser C_3 ein vollständiges Bild der Veränderungen vor uns, welche die Lage des zweiten Begrenzungskreises bei Veränderung des seitlichen Anstofses erfährt. Ziehen wir nämlich die Parallele $v = n$ zur u-Axe, so trifft diese den unpaaren Zug in einem Punkte, dessen Abscisse die Gröfse des Kreises $u = e'$ angiebt. Geben wir jener Geraden alle möglichen Lagen zwischen $v = -\infty$ und $v = +\infty$, so durchläuft der Schnittpunkt den ganzen unpaaren Zug.

Wir wollen diesen Vorgang in derselben Reihenfolge betrachten, in welcher die Figuren 29 bis 35 auf einander folgen.

Wir lassen also n von dem in Fig. 25 dargestellten Falle $n = 0$ aus zunächst abnehmen, verschieben also unsere Parallele zur u-Axe nach unten hin. Der Wert von e' verkleinert sich dabei, d. h. der zweite Begrenzungskreis erweitert sich, bis er (für $e' = e = 0$) mit dem Äquator zusammengefallen ist. Die Bewegung geht dann in den Fall der langsamen Präcession über; der entsprechende Punkt unserer C_3 ist ihr Schnittpunkt mit der Ordinatenaxe, welchem, wie wir oben sahen, die Ordinate

$$v_1 = n = \frac{AP}{N}$$

zukommt; derselbe Wert von n wurde bereits pag. 202 für die langsame Präcession abgeleitet.

Wir gehen jetzt wieder zu der Lage $v = 0$ unserer Geraden zurück und verschieben sie nach oben, indem wir n wachsen lassen. Dabei wächst der Wert von e' eine Zeit lang, d. h. unser Begrenzungskreis verengert sich, bis er sich (für $e' = 1$) auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat. Der zugehörige Wert von n ist, wie wir unserer C_3 entnehmen,

$$n = N.$$

Von da ab nimmt bei weiter wachsendem n der Wert von e' ab; der Begrenzungskreis erweitert sich und geht für $n = \infty$ asymptotisch in den Äquator über; die Bahnkurve nähert sich mehr und mehr der in Fig. 35 dargestellten schnellen regulären Präcession.

Es bleiben nur noch diejenigen Fälle übrig, welche bei negativem n den Übergang bilden zwischen der langsamen und der schnellen Präcession. Der zweite Begrenzungskreis e' bleibt bei allen diesen Fällen dem Äquator sehr nahe und liegt, wie unsere C_3 zeigt, auf der südlichen Hemisphäre der Einheitskugel ($e' < 0$). Zunächst verengert er sich ein wenig bis zu dem extremen Werte u_2, welcher unter den unseren Figuren zu Grunde liegenden Verhältnissen gleich — 0,02 ist und dem Werte $v_2 = n = -10$ entspricht. Von da ab nimmt er wieder zu und geht für $v = -\infty$ in den Äquator über. In dem Umstande, dafs dieser ganze Teil der C_3 der Ordinatenaxe aufserordentlich nahe liegt, erkennen wir den Grund, warum wir früher (vgl. pag. 214) für die entsprechenden Fälle der Kreiselbewegung keine deutliche Bahnkurve zeichnen konnten.

Die numerischen Daten, welche den Figuren 29 bis 35 zu Grunde liegen, stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen; sie sind auch aus der Stellung der bez. Nummern in unserer C_3 zu ersehen.

$A = -P = 1, \quad N = 0{,}20.$

Fig. 29	$e' = 0{,}96$	$n = -0{,}20$
„ 30	0,67	-1
„ 31	0	$-5 = \frac{AP}{N}$
„ 32	0,9964	$+0{,}08$
„ 33	1	$+0{,}20 = N$
„ 34	0,87	$+1$
„ 35	0	$\pm\infty$.

Wohlgemerkt entspricht unsere C_3, sowie unsere Figurenserie 29—35 nur einem ganz bestimmten und zwar einem kleinen Werte von N. Wenn man diesen Wert wachsen läfst, wird sich auch die Gestalt der C_3, sowie die Serie unserer Bahnkurven verändern. Der Erfolg wird nämlich der sein: Es wird sich bei wachsendem N der oberhalb der Abscissenaxe gelegene Teil der C_3 in die Länge strecken; der untere Teil wird gedrungener werden, indem die vertikale Tangente $u_2 = \frac{N^2}{2AP}$ nach links wandert und gleichzeitig ihr Berührungspunkt $v_2 = \frac{2AP}{N}$ der Abscissenaxe näher rückt. Eine wesentliche qualitative Änderung in dem Verlauf der Bahnkurven wird sich aber erst ergeben, wenn die genannte vertikale Tangente über die Gerade $u = -1$ nach links hinausrückt, worauf wir im folgenden Paragraphen ausführlich eingehen werden.

Wir bemerken hier nur noch, dafs bei einer Vorzeichenumkehr von N die C_3 eine Spiegelung an der Abscissenaxe erleidet. In der That bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ ungeändert, wenn wir gleichzeitig N mit $-N$ und n mit $-n$ vertauschen. Infolgedessen ergiebt sich bei einem negativen Werte von N dieselbe Serie der Bahnkurven wie bei dem entsprechenden positiven Werte, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Wir erwähnen schliefslich, dafs auch in dem früher citierten Werke von Routh*) ein Ansatz zur geometrischen Diskussion der Gleichung dritten Grades $U = 0$ gegeben wird.

§ 7. Die charakteristischen Kurven dritter Ordnung bei beliebiger Lage des Ausgangskreises e; Unterscheidung zwischen starken und schwachen Kreiseln.

Wir haben jetzt die Überlegungen des vorigen Paragraphen noch einmal in gröfserer Allgemeinheit anzustellen und namentlich zuzusehen, inwiefern die im zweiten Paragraphen entwickelte Figurenserie wegen

*) Rigid dynamics, advanced part, pag. 114, art. 204.

der dort getroffenen besonderen Voraussetzungen (z. B. $e = 0$) zu speziell ausfiel. Wir lassen also jetzt die Lage des Ausgangskreises c beliebig und legen dementsprechend die Gleichung $U_1 = 0$ in der Form von pag. 240 zu Grunde. Da diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn wir n und N gegeneinander vertauschen, können wir uns darauf beschränken, die Abhängigkeit der Bahnkurven von einer dieser Gröfsen, z. B. von n zu betrachten und N als einen festen Parameter anzusehen, dessen Gröfse allerdings nicht unwesentlich ist. Wir setzen wieder $n = v$; die Abhängigkeit zwischen u und v wird dann durch die Kurve dritter Ordnung dargestellt:

$$(1) \quad -(u+e)(v^2+N^2)+2Nv(1+eu)-2AP(1-e^2)(1-u^2)=0.$$

Indem wir auch hier nach den vertikalen Tangenten der Kurve fragen, haben wir die Überlegungen von pag. 244 von Neuem anzustellen. Zwei dieser Tangenten (I und II) sind wie früher durch $u = \pm 1$ gegeben; ihr Berührungspunkt ist $v = \pm N$. Ferner giebt es auch hier eine vertikale Gerade (III), welche die Kurve im Unendlichen berührt. Sie hat die Gleichung $u = -e$ und schneidet die Kurve noch in dem Punkte

$$v = \frac{AP}{N}(1-e^2).$$

Eine vierte vertikale Tangente (IV) folgt wie pag. 244 durch Nullsetzen der „Discriminante", welcher man hier durch eine kleine Rechnung die Form giebt:

$$(N^2 - 2AP(u+e))(1-e^2)(1-u^2).$$

Unsere vierte vertikale Tangente ist also die Gerade

$$(2a) \qquad u = -e + \frac{N^2}{2AP}$$

mit dem Berührungspunkte

$$(2b) \qquad v = Ne + \frac{2AP}{N}(1-e^2).$$

Diese Gerade liegt, bei negativem P, wegen (2a) jedenfalls links, bei positivem P rechts von der Asymptote $u = -e$. Wir müssen aber weiter zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem diese Gerade bei negativem (positivem) P auch links (rechts) von der Geraden $u = -1$ ($u = +1$) liegt oder rechts (links) von derselben. Die Bedingungen hierfür lauten beziehungsweise:

$$P<0 \begin{cases} -e+\frac{N^2}{2AP} < -1, \\ -e+\frac{N^2}{2AP} > -1, \end{cases} \qquad P>0 \begin{cases} -e+\frac{N^2}{2AP} > +1, \\ -e+\frac{N^2}{2AP} < +1. \end{cases}$$

Ob die eine oder andere dieser Ungleichungen erfüllt ist, hängt bei gegebener Massenverteilung und gegebener Anfangslage des Kreisels von der Stärke seines Eigenimpulses ab. *Wir unterscheiden danach zwei Kreiselarten, welche wir als starke und schwache Kreisel bezeichnen;* dieselben sollen im Falle $P<0$ bez. $P>0$ durch die mit den vorstehenden identischen Ungleichungen definiert sein:

$$(3)\qquad P<0\begin{cases}N^2>-2AP(1-e)\cdots & \text{starker Kreisel,}\\ N^2<-2AP(1-e)\cdots & \text{schwacher Kreisel;}\end{cases}$$

$$(3')\qquad P>0\begin{cases}N^2>+2AP(1+e)\cdots & \text{starker Kreisel,}\\ N^2<+2AP(1+e)\cdots & \text{schwacher Kreisel.}\end{cases}$$

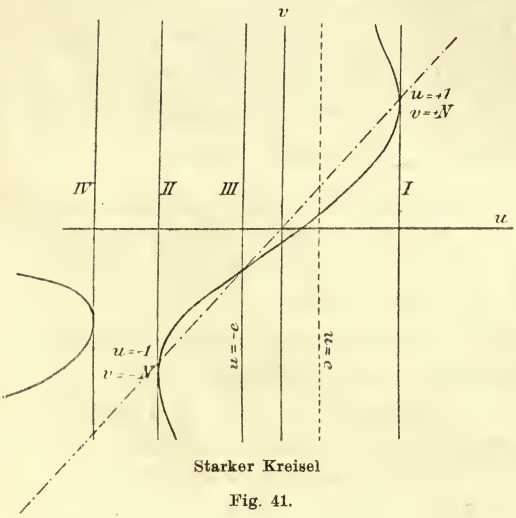
Man kann bemerken, dafs unsere Unterscheidung keine absolute ist, sondern von der Anfangslage e des Kreisels abhängt. Beispielsweise ist bei positivem P im Fall $e=-1$, wo die Bahnkurve im Südpole der Kugel beginnt, jeder Kreisel ein starker Kreisel.

Die Gestalt der C_3 fällt nun, je nachdem ein starker oder ein schwacher Kreisel vorliegt, verschieden aus. Beidemal besteht die Kurve aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Bei dem starken Kreisel durchquert aber der unpaare Zug den ganzen Vertikalstreifen zwischen $u=-1$ und $u=+1$, bei dem schwachen Kreisel ist er auf einen Teil desselben eingeschränkt, welcher durch die Geraden $u=-1$ und $u=-e+\frac{N^2}{2AP}\,(P<0)$ bez. durch die Geraden $u=+1$ und $u=-e+\frac{N^2}{2AP}\,(P>0)$ begrenzt wird.

(Nur in dem Grenzfalle zwischen dem starken und schwachen Kreisel, wo in (3) und (3′) statt der Zeichen $\gtrless$ das Zeichen $=$ eintritt, verschmelzen die beiden Bestandteile unserer C_3 mittels eines bei $u=\mp 1$, $v=\mp N$ gelegenen Doppelpunktes zu einem einzigen Kurvenzuge. Es wird nicht nötig sein, diesen Grenzfall im Folgenden ausdrücklich zu besprechen. Er vermittelt natürlich den stetigen Übergang zwischen den Bewegungen des starken und des schwachen Kreisels. Im nächsten Kapitel (vgl. namentlich § 8) werden wir nur noch auf diejenige spezielle Bewegung dieses Grenzfalles zurückzukommen haben, welche in der C_3 durch den Doppelpunkt selbst charakterisiert wird und welche im Hinblick auf die Theorie der kleinen Schwingungen ein besonderes Interesse beanspruchen darf.)

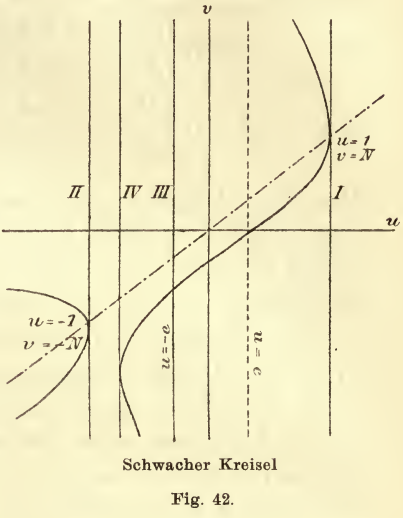
Um nicht zu viele Fallunterscheidungen zu haben, werden wir, wie in den ersten Paragraphen, annehmen, dafs $P<0$ sei. Dieser Annahme entsprechen die Figuren 41 und 42. Der Fall $P>0$ läfst sich nach pag. 198 dadurch auf $P<0$ zurückführen, dafs wir die Bezeichnung

„Figurenaxe“ von dem einen der beiden Halbstrahlen, in welche die Symmetrieaxe der Massenverteilung durch den Unterstützungspunkt zerlegt wird, auf den anderen übertragen. Dabei ändert sich ersichtlich neben dem Vorzeichen von P auch das von N, während die Impulskomponente n ungeändert bleibt. Gleichzeitig geht der Winkel ϑ



Starker Kreisel

Fig. 41.



Schwacher Kreisel

Fig. 42.

über in $\pi - \vartheta$. Es werden also auch die Gröfsen u, e, e', e'' im Vorzeichen umzukehren sein. Hiernach ist klar, dafs wir die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $P > 0$ aus den angezeichneten einfach dadurch erhalten, dafs wir die letzteren an der Ordinatenaxe spiegeln. Auf ihre Wiedergabe können wir füglich verzichten.

Wir machen jetzt unsere Konstruktion zur Auffindung des Begrenzungskreises $u = e'$, verschieben also die Gerade $v = n$ parallel der u-Axe von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ und suchen den Abscissenwert ihres Schnittpunktes mit dem unpaaren Zuge der C_3 auf. Hierbei tritt folgender charakteristischer Unterschied zwischen dem starken und schwachen Kreisel hervor: Bei dem starken Kreisel bestreicht die Projektion des Schnittpunktes auf die Abscissenaxe das ganze Intervall zwischen -1 und $+1$; bei dem schwachen Kreisel durchläuft sie nur ein Stück dieses Intervalles, welches von $u = +1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ begrenzt wird. Beidemal wird übrigens jeder Wert, der überhaupt erreicht wird, zweimal erreicht. *Dies hat zur Folge, dafs beim starken Kreisel der Parallelkreis e' jede Lage auf der Kugel annehmen kann und zwar jede noch bei zwei verschiedenen Werten des n, dafs er da-*

gegen beim schwachen Kreisel von einer gewissen Kugelkalotte ausgeschlossen ist, welche den Südpol der Einheitskugel umgiebt und durch den Kreis $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ *begrenzt wird.*

Wir sehen hieraus, dafs den Figuren 29 bis 35 die Annahme eines schwachen Kreisels zu Grunde lag, weil bei diesen der gröfste Teil der südlichen Halbkugel von Bahnkurven überhaupt freiblieb. In der That ist denn auch für die früher vorausgesetzten Werte

$$N = 0{,}20, \quad A = 1, \quad P = -1, \quad e = 0$$

von den beiden Kriterien (3) das zweite erfüllt.

An der Hand unserer Figuren lassen sich jetzt weiter die verschiedenen ausgezeichneten Fälle, welche bei der Kreiselbewegung vorkommen können, das Auftreten der regulären Präcession, die Spitzenbildung u. s. w. bequem untersuchen. Dies soll im Folgenden unter einer Anzahl verschiedener Nummern geschehen.

1) Wir sehen zunächst zu, was unsere Kurven über die Möglichkeit der *regulären Präcession* aussagen. Reguläre Präcession tritt ein, wenn $e' = e$ wird. Wir ziehen daher die Gerade $u = e$; ihre Schnittpunkte mit der Kurve dritter Ordnung geben, wenn solche vorhanden sind, diejenigen Werte von n, welche für die reguläre Präcession erforderlich sind. Dabei unterscheiden sich wieder der starke und der schwache Kreisel:

Beim starken Kreisel giebt es immer zwei reelle Schnittpunkte auf der Geraden $u = e$ *und daher zwei (im allgemeinen verschiedene) Fälle möglicher Präcessionsbewegung.*

Beim schwachen Kreisel dagegen sind die Schnittpunkte nur dann reell, wenn die Gerade $u = e$ rechts von der Tangente $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ liegt, wenn also die Ungleichung besteht

$$4APe < N^2.$$

Beim schwachen Kreisel giebt es also zwei Fälle oder keinen Fall regulärer Präcession, je nachdem gilt

$$4APe < N^2 \quad \text{oder} \quad 4APe > N^2. \tag{4}$$

Wir bemerken noch, dafs bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe ($e = 0$) die erste unserer Ungleichungen von selbst erfüllt ist, falls nicht gerade $N = 0$ wird. Dementsprechend hatten wir im zweiten Paragraphen dieses Kapitels, trotzdem ein schwacher Kreisel vorlag, bei $N > 0$ stets zwei reelle Präcessionsfälle.

Die Werte von n, welche den beiden Fällen der regulären Prä-

cession entsprechen, ergeben sich natürlich aus (1), wenn wir $u = e$ setzen und die so entstehende quadratische Gleichung

$$(5) \qquad (v - Ne)(N - ve) = AP(1 - e^2)^2$$

auflösen; wir finden

$$(6) \qquad v = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + e^2)N \pm (1 - e^2)\sqrt{N^2 - 4APe}}{2e}.$$

(Es wird gut sein, dieses Resultat mit den Entwickelungen von pag. 178, 179 in Beziehung zu setzen. Wir sahen dort, dafs es bei gegebener Massenverteilung, gegebenem Werte von $\cos\vartheta = e$ und *gegebener Geschwindigkeitskomponente* μ zwei Werte der Geschwindigkeitskomponente ν giebt, welche im Falle des Kugelkreisels eine reguläre Präcession bedingen, nämlich

$$\text{(a)} \quad \nu = \frac{A\mu}{P}, \qquad \text{(b)} \quad \nu = \pm\infty.$$

Unser jetziges Resultat lautet, von dem früheren scheinbar abweichend, folgendermafsen: Bei gegebener Massenverteilung, gegebener Gröfse des Parallelkreises e und *gegebener Impulskomponente* N entsteht eine reguläre Präcession des Kugelkreisels bei zwei Werten der Impulskomponente n, welche in (6) angegeben sind. Die Abweichung beruht offenbar darauf, dafs wir das eine Mal die Geschwindigkeitskomponente μ, das andere Mal die Impulskoordinate N festhalten; wir können uns daher nicht wundern, dafs wir für die zugehörigen Werte der Präcessionskonstanten ν bez. n beidemal verschiedene Werte erhalten.

Um die Beziehung zwischen den Wurzeln n_1, n_2 und den früher unterschiedenen Fällen (a) und (b) noch genauer zu verfolgen, bemerken wir, dafs beide Wurzeln n_1, n_2 dem Falle (a) entsprechen. In der That zeigen wir leicht, dafs unsere Gleichung (5) mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gewonnenen Gleichung $P = A\mu\nu$, welche uns die Wurzel (a) lieferte, identisch ist. Benutzen wir nämlich die pag. 238 in Gleichung (6) angegebenen Werte von ψ' und φ' und berücksichtigen wir, dafs diese bei der regulären Präcession bez. den Konstanten ν und μ gleich werden, so haben wir

$$(7) \qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1 - e^2)}.$$

Infolgedessen geht die Gleichung (5) wirklich in die Beziehung $P = A\mu\nu$ über, welche aussagt, dafs die Drehkraft der Schwere mit dem Trägheitswiderstand des Kugelkreisels im Gleichgewichte steht.

Wir überzeugen uns ferner, dafs der Fall (b) der Präcession, bei welcher μ einen gegebenen endlichen Wert hat und ν unendlich grofs ist, von einer Ausnahme abgesehen einem unendlich grofsen Werte von

N entspricht. Hierzu diene die nebenstehende Figur, in welcher der Endpunkt des Rotationsvektors auf der durch den Endpunkt der Komponente μ gezogenen Parallelen zur Vertikalen in unendlicher Entfernung zu denken ist. Projizieren wir diesen Vektor senkrecht auf die Figurenaxe, so ergiebt sich, unter Ω die Länge des Rotationsvektors verstanden, als Länge der Orthogonalprojektion auf die Figurenaxe $r = \Omega \cos \vartheta = \infty$, so dafs auch die Impulskomponente N unendlich grofs wird.

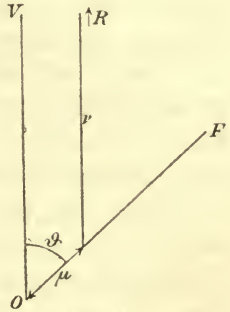


Fig. 43.

Der angedeutete Ausnahmefall ist der Fall $e = 0$, in welchem die Wurzeln (a), (b) bez. den (durch A dividierten) Wurzeln n_1, n_2 gleich werden. In der That sind unter der Annahme $e = 0$ die Parallelkomponenten ν und μ des Rotationsvektors zugleich Orthogonalkomponenten bezüglich der Vertikalen und der Figurenaxe. Dementsprechend finden wir dann aus (6) durch den Grenzübergang $e = 0$ direkt die Wurzeln (a) und (b) wieder, nämlich

$$\text{(a)}\quad \frac{n_1}{A} = \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{n_2}{A} = \nu = \pm\infty .$$

Trotz des somit gekennzeichneten Unterschiedes möge es gestattet sein, auch die beiden Fälle regulärer Präcession, welche bei gegebenem N möglich sind, ebenso wie die beiden Fälle, welche zu einem gegebenen μ gehören, je nach der Gröfse von n als *langsame* und *schnelle Präcession* zu bezeichnen. Da wir in Zukunft nicht mehr wesentlich auf die Präcessionskonstanten μ und ν rekurrieren werden, so wird durch diese Zweideutigkeit der Benennung kein Mifsverständnis entstehen.)

2) Sodann wollen wir *den Grenzfall der Kreiselbewegung bei unendlich wachsendem* n untersuchen. Während dieser Grenzfall, wie wir wissen, unter der Annahme $e = 0$ mit der schnellen regulären Präcession zusammenfällt, welche alsdann ihrerseits in eine unendlich schnelle Präcession ausartet, ist er bei allgemeiner Anfangslage wesentlich davon verschieden.

Zunächst können wir aus unsern Kurven dritter Ordnung über diesen Grenzfall Folgendes schliefsen: Der zweite Begrenzungskreis e' fällt sowohl beim starken wie beim schwachen Kreisel für $n = \infty$ mit dem Parallelkreise $-e$ zusammen; in der That ist $-e$ die Abscisse des auf dem unpaaren Zuge gelegenen unendlich fernen Punktes der C_3.

Im Grenzfall $n = \infty$ *oscilliert also die Kreiselspitze um den Äquator als Mittellage herum, indem die Bahnkurve zwischen den Kreisen* $+e$ *und* $-e$ *auf und ab schwankt.*

Die Gestalt der Bahnkurve wird dabei äufserst einfach. Zur Orientierung betrachten wir vorab einen Kreisel, für welchen $P = N = 0$ ist, also einen schwerelosen Kreisel ohne Eigenimpuls. Die betr. Bewegung gehört (wegen $N = 0$) unter die Bewegungen des sphärischen Pendels; dabei liegt (wegen $P = 0$) der spezielle Fall vor, dafs die Wirkung der Schwere aufgehoben ist. Die Bahnkurve mufs daher dieselbe sein, wie die eines einzelnen Massenpunktes, welcher keinen äufseren Kräften ausgesetzt ist und gezwungen wird, auf einer Kugelfläche zu bleiben. Dieser beschreibt aber auf der Kugel ersichtlich einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit.

Wird nun P und N nicht gleich Null gesetzt, dafür aber der seitliche Anstofs n unendlich grofs genommen, so wird die Bahn der Kreiselspitze dieselbe bleiben wie vorher. Es wird nämlich der Einflufs des Anfangsstofses den der Schwere und des Eigenimpulses völlig überwinden.

Mit dieser Überlegung stimmt das Resultat der Rechnung überein. Lassen wir nämlich n unendlich grofs werden, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240 in erster Annäherung:

$$U = -\frac{n^2}{A^2}\frac{u^2 - e^2}{1 - e^2}.$$

Das Integral für t von pag. 238 vereinfacht sich folgendermafsen:

$$(8) \qquad t = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\int \frac{du}{\sqrt{e^2-u^2}} = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\arcsin\frac{u}{e};$$

hieraus folgt

$$u = e\sin\frac{nt}{A\sqrt{1-e^2}}.$$

Es wird also die Änderungsgeschwindigkeit von u unendlich grofs. Gleichzeitig geht das Integral für ψ von pag. 238 näherungsweise über in

$$\psi = \sqrt{1-e^2}\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{e^2-u^2}};$$

der Wert desselben wird, wie man leicht verifiziert:

$$(8') \qquad \psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Diese Gleichung können wir, wenn wir $u = \cos\vartheta$, $e = \cos\vartheta_0$ machen, einfacher so schreiben:

$$(9) \qquad \sin\psi\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \mathrm{tg}\,\vartheta_0;$$

richtig interpretiert, sagt sie aus, *dafs die Kreiselspitze einen gröfsten Kreis beschreibt.*

Die Kreiselspitze hat nämlich im XYZ-System die Koordinaten

$$X = Y = 0, \quad Z = 1;$$

ihre Koordinaten im xyz-System werden daher nach den Substitutionsformeln (5) von pag. 19

$$x = \sin\vartheta \sin\psi, \quad y = -\sin\vartheta\cos\psi, \quad z = \cos\vartheta.$$

Mithin können wir die Gleichung (9) unserer Bahnkurve auch so schreiben:

$$x = \operatorname{tg}\vartheta_0 z.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene durch O, welche aus der Einheitskugel den vorgenannten gröfsten Kreis ausschneidet.

Stellen wir insbesondere die Figurenaxe in der Anfangslage horizontal, so geht unser gröfster Kreis in den Äquator über und wir haben wieder die unendlich schnelle reguläre Präcession des ersten Paragraphen, welche sich jetzt mit unserem Grenzfalle confundiert.

Die Verhältnisse der ersten Paragraphen waren also insofern zu partikulär gewählt. *Bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe giebt es zwischen der schnellen Präcession und unserem Grenzfalle eine Folge von Übergängen, welche uns in den ersten Paragraphen entschlüpft ist.* Die hier erforderliche Ergänzung kann aber leicht angebracht werden.

Wir stellen hierunter die Bahnkurven der schnellen Präcession und des Grenzfalles in den Figuren 44 und 45 stereographisch dar. Bei ersterer ist die Bahnkurve der Kreis $u = e$, bei letzterem der die Kreise $u = +e$ und $u = -e$ berührende stärker ausgezeichnete Kreis.

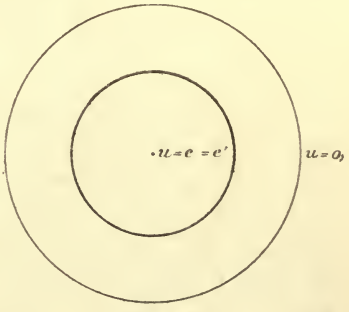


Fig. 44.

Die Übergangskurven zwischen beiden haben folgenden Charakter. Der Begrenzungskreis e' eweitert sich bei wachsendem n allmählich, indem er, von seiner Lage in Fig. 44 ausgehend, den Äquator überschreitet und sich asymptotisch dem Kreise $u = -e$ nähert. Die Bahnkurve, welche zwischen den Kreisen e und e' hin und her laufen mufs, umschliefst in der stereographischen Projektion den ersteren Kreis, während sie von dem letzteren umschlossen wird. Als Typus dieser Bahnkurven können wir etwa die Fig. 30 ansehen, wobei jetzt der innere Kreis den festgehaltenen Ausgangskreis e, der äufsere den Begrenzungskreis e' bedeuten würde. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt mit

wachsendem n ab, bis sie für $n = \infty$ sich auf Null reduziert hat, so dafs die Bahnkurve einfach in sich zurückläuft.

Neben den Grenzfall $n = \infty$ bei endlichem N stellt sich der Grenzfall $N = \infty$ bei festgehaltenem n, welcher sich ähnlich wie jener behandeln läfst. Wie erwähnt bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ bei Vertauschung von n und N ungeändert, so dafs wir in den Figuren 41 und 42 der Ordinate v ebensowohl die Bedeutung N wie n beilegen

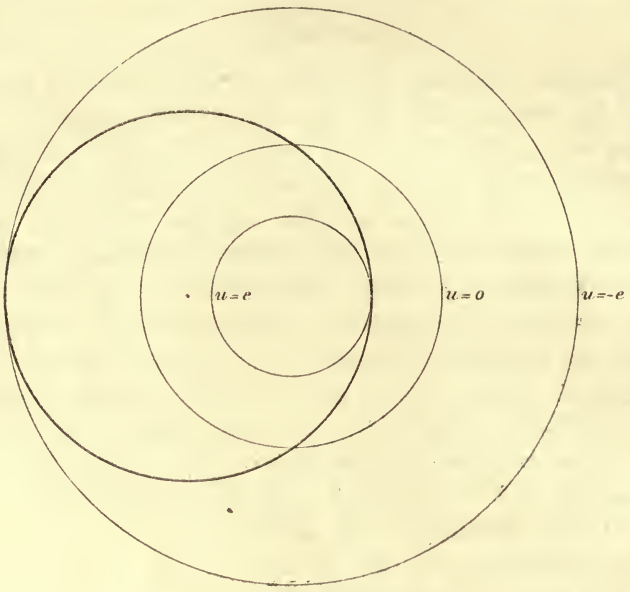


Fig. 45.

können. Hieraus folgt, dafs auch bei wachsendem N und festgehaltenem n der Begrenzungskreis e' asymptotisch in die Lage $-e$ übergeht. Die Kreiselspitze oscilliert also auch in diesem Grenzfalle mit unendlicher Geschwindigkeit zwischen den beiden Kreisen e und $-e$ auf und ab. Nur bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe fallen die beiden Begrenzungskreise zusammen, die Amplitude der Oscillation wird in der Grenze verschwindend klein und wir haben den in Fig. 28 dargestellten Typus der pseudoregulären Präcession. In allen anderen Fällen dagegen wird die Bahnkurve in der Grenze $N = \infty$ ein wesentlich davon verschiedenes Bild darbieten.

Unter welchen Umständen bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe der besonders interessante Fall der pseudoregulären Präcession zustande kommt, wird im nächsten Kapitel ausführlich darzustellen sein.

3) Wir wollen schliefslich noch die Möglichkeit von *Spitzen- und*

Schleifenbildung untersuchen. Die Bahnkurve kann nur dann auf den Parallelkreisen e oder e' mit Spitzen aufsitzen, wenn für $u = e$ oder e' $\frac{d\psi}{du} = 0$ wird. Wir schliefsen daraus, ebenso wie pag. 242, dafs die Bedingung für das Auftreten von Spitzen an den Kreisen e und e' bez. lautet:

$$n - Ne = 0, \quad n - Ne' = 0.$$

Was den Ausgangskreis e betrifft, so zeigt sich also, dafs für ein bestimmtes Verhältnis von $n : N$ allemal Spitzenbildung eintreten wird. Im § 2 lag nur der besondere Fall vor, dafs dieses Verhältnis gleich Null war, dafs also, unabhängig von dem Werte des Eigenimpulses, Spitzenbildung immer dann auftrat, wenn der seitliche Anstofs gleich Null genommen wurde.

Um auch das Auftreten von Spitzen an dem Begrenzungskreise e' bequem übersehen zu können, greifen wir wieder auf unsere Kurven dritter Ordnung zurück. Denken wir uns N festgehalten und n variabel $(n = v)$, so wird unsere obige Bedingung in der uv-Ebene durch die Gerade

$$v - Nu = 0$$

dargestellt, welche die Berührungspunkte der Tangenten $u = \pm 1$ verbindet und in den Figuren 41, 42 strichpunktiert gezeichnet ist. Die Frage ist, ob diese Gerade die C_3 innerhalb des mechanisch gültigen Intervalles schneidet oder nicht.

Zwei Schnittpunkte fallen in die Punkte $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Ihnen entspricht aber keine eigentliche Spitzenbildung, weil sich in diesem Falle der Begrenzungskreis e' auf einen einzelnen Punkt, den Nord- oder Südpol zusammengezogen hat. Was den dritten Schnittpunkt betrifft, so zeigt der Anblick unserer Kurven unmittelbar, dafs er auf dem unpaaren Zuge liegt im Falle des starken, auf dem paaren Zuge im Falle des schwachen Kreisels.

Bei dem starken Kreisel giebt es daher einen bestimmten Parallelkreis e', auf welchen sich — bei festgehaltenem N und geeignet gewähltem n — die Bahnkurve mit Spitzen aufsetzt, bei dem schwachen Kreisel giebt es keinen solchen Kreis.

Wie wir sahen, entspricht die im ersten Paragraphen entwickelte Figurenserie 29—35 dem Falle eines schwachen Kreisels, so dafs in diesen Figuren eine Spitzenbildung auf dem Kreise e' nicht vorkommen konnte. Es zeigt sich jetzt überdies, dafs das gleiche Vorkommnis im Falle des schwachen Kreisels auch bei beliebiger Lage des Anfangskreises e ausgeschlossen ist. Die frühere Figurenserie bietet insofern für den schwachen Kreisel ein hinreichend allgemeines Bild der Bahn-

kurvenfolge. Es bleibt aber noch die Aufgabe bestehen, beim starken Kreisel die kontinuierliche Einordnung der soeben gefundenen Spitzenkurve in die Bahnkurvenserie klarzustellen. Dies soll am Ende dieses Paragraphen geschehen. Vorher wollen wir noch unseren Kurven dritter Ordnung ein Kriterium über das Auftreten von *Schleifen* entnehmen.

Wenn die Gleichung $n - Nu = 0$ für $u = e$ oder e' erfüllt ist, ergiebt sich, wie wir eben sahen, Spitzenbildung. Ist aber diese Gleichung für einen zwischen e und e' gelegenen Wert von u erfüllt, so läuft die Bahnkurve im stereographischen Bilde jedesmal, wo sie den so bestimmten Parallelkreis u überschreitet, in radialer Richtung. Alsdann folgt, wie pag. 242, das Vorhandensein von Schleifen. Geometrisch erkennen wir daher das Auftreten von Schleifen so: Wir ziehen unsere Parallele $v = n$ zur Abscissenaxe und schneiden diese mit der Geraden $v - Nu = 0$. Liegt die Abscisse des Schnittpunktes zwischen e und e', so treten Schleifen auf, liegt sie aufserhalb jenes Intervalles, so sind Schleifen unmöglich.

Wendet man diese Regel auf die C_3 des schwachen Kreisels an, so sieht man sofort, dafs Schleifenbildung nur in dem Intervalle zwischen der auf dem Ausgangskreise e mit Spitzen aufsitzenden Kurve und derjenigen Bahnkurve auftreten kann, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. Ein Beispiel hierfür bietet die Figur 32 von pag. 213.

Dasselbe Intervall ist auch beim starken Kreisel durch Schleifenbildung ausgezeichnet. Hier findet sich aber noch ein zweites Intervall, welches von dem Schnittpunkte der C_3 mit der Geraden $v - Nu = 0$ bis zu ihrem Berührungspunkt mit der Geraden $u = -1$ reicht. Alsdann befindet sich nämlich (vgl. Fig. 41) der Schnittpunkt von $v = n$ mit der Geraden $v - Nu = 0$ rechts von der C_3 und fällt bei der Projektion auf die Abscissenaxe in das Gebiet $e\,e'$. Die betreffenden Schleifenkurven schliefsen sich nach der einen Seite an diejenige Bahnkurve, welche sich auf den Kreis e' mit Spitzen aufsetzt, nach der anderen Seite an die Kurve, welche durch den Südpol der Einheitskugel hindurchzieht, kontinuierlich an.

Bei dem schwachen Kreisel haben wir also ein, bei dem starken zwei Intervalle mit Schleifenbildung. —

Wir wollen zum Schlusse, wie bereits in Aussicht genommen, die Bahnkurvenserie des ersten Paragraphen für den Fall des starken Kreisels dahin ergänzen, dafs wir den Übergang von der langsamen regulären Präcession bis zu dem Grenzfalle $n = \infty$ durch die Fälle der Schleifen- und Spitzenbildung hindurch verfolgen.

Wir gehen von der langsamen regulären Präcession aus, geben N einen festen, positiven Wert und lassen n abnehmen. Gleichzeitig mit n nimmt auch der Wert e' zunächst gleichförmig ab, wie aus Fig. 41 ersichtlich.

Die Bahnkurve berührt dabei im stereographischen Bilde den Ausgangskreis von aufsen, indem sie ihn umschliefst, den zweiten Begrenzungskreis von innen. Für einen gewissen oben konstruierten Wert von n tritt an Stelle der Berührung des Kreises e' die Spitzenbildung an diesem Kreise. Bei weiter abnehmendem n lösen sich die Spitzen in Schleifen auf Dieser Charakter der Bahnkurve bleibt bestehen, bis n den Wert $-N$ erreicht hat, wo sich der Kreis e' auf den Südpol zusammenzieht und dementsprechend sein stereographisches Bild unendlich grofs geworden ist. Von jetzt ab erweitert sich der Kreis e' wieder (d. h. er verengert sich im stereographischen Bilde) und strebt asymptotisch dem Parallelkreise $u = -e$ zu. Die Bahnkurve nimmt dabei mehr und mehr die in Fig. 45 verzeichnete einfache Gestalt an.

§ 8. Über die numerische Berechnung der elliptischen Integrale für t und ψ.

Bei einem Probleme der Anwendungen, wie es hier vorliegt, dürfen wir uns nicht damit begnügen, die Möglichkeit der Rechnung in einem allgemeinen Schema darzuthun. Wir müssen vielmehr bis zur wirklichen numerischen Durchführung vorzudringen suchen. Während die älteren Mathematiker bis Gaufs und Jacobi incl. stets bemüht waren, ihre Resultate nicht nur durch konvergente, sondern auch durch gut konvergente, praktikable Prozesse darzustellen, geht die augenblickliche Entwickelung der Mathematik vielfach dahin, die numerische Exekutive über Gebühr zu vernachlässigen. Demgegenüber möchten wir in der numerischen Durchführung einer Theorie geradezu den Schlufsstein des Gebäudes erblicken, dem wir keine geringere Wichtigkeit und kein geringeres Interesse beimessen, wie jedem anderen Bestandteile des Ganzen. Speziell sind wir bei Aufgaben, welche auf elliptische Funktionen führen, dank der hohen Entwickelung dieser Theorie, in der angenehmen Lage, die numerische Auswertung ohne alle Schwierigkeit bewerkstelligen zu können, wie sich in diesem Paragraphen zeigen wird.

Es handle sich zunächst um ein Integral von der Form unseres t:

$$t = \int^{u} \frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{1}$$

in welchem U irgend ein Polynom dritten oder vierten Grades in u bedeutet. Wir setzen von U nur voraus, dafs die Wurzeln $U = 0$ reell

sind. Man bezeichnet ein solches Integral als ein *elliptisches Integral erster Gattung*, weil es sich stets auf diejenige Normalform bringen läfst, die Legendre als „fonction de première espèce“ eingeführt hat. Die Bezeichnung überall endliches Integral, welche an das Verhalten von t in der komplexen Ebene anknüpft und somit die Integrale erster Gattung in funktionentheoretischer Hinsicht charakterisiert, kann erst im sechsten Kapitel erläutert werden.

Die Legendresche Normalform des Integrals erster Gattung ist in der Legendreschen Bezeichnung die folgende:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \tag{2}$$

hier heifst φ die Amplitude, k der Modul des Integrals; man setzt voraus $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $0 < k < 1$. Wird $\sin^2 \varphi = x$ gesetzt, so können wir auch schreiben:

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}. \tag{2'}$$

Fast alle Methoden, welche zur Auswertung der elliptischen Integrale erster Gattung angegeben werden, stimmen darin überein, dafs sie zunächst die Transformation des vorgelegten Integrales auf die Legendresche Normalform erfordern. Hiervon machen auch diejenigen Autoren keine Ausnahme, welche wie Schwarz*) und Halphen*) von der Weierstrassischen Theorie ausgehen und die Formeln der älteren Theorie in die Weierstrassischen Bezeichnungen übersetzen. So wichtig aber diese Theorie in theoretischer Hinsicht ist, so scheint sie doch nach der numerischen Seite über die ältere Theorie keinen eigentlichen Fortschritt gemacht zu haben. Wir möchten daher vorschlagen, bei numerischen Fragen direkt auf die Legendreschen Bezeichnungen und Begriffe zurückzugreifen, anstatt sie jedesmal durch die Weierstrassischen zu umschreiben.

Um die Transformation des Integrales (1) auf die Legendresche Normalform ausführen zu können, mufs man die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ aufsuchen. Wir beschränken uns auf den beim Kreisel vorliegenden Fall, dafs U ein Polynom dritten Grades ist, so dafs wir nur eine kubische Gleichung zu lösen haben. Diese Gleichung reduziert sich sogar, da wir die Wurzel e als bekannt ansehen (vgl. pag. 239), auf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ mit den Wurzeln e' und e''.

*) Vgl. H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, und Halphen: Théorie des fonctions elliptiques, Bd. I. Kap. 8.

Zu den so bestimmten Wurzeln e, e', e'' müssen wir noch nach pag. 226 den „vierten Verzweigungspunkt“ ∞ als gleichberechtigt hinzunehmen.

Wir wollen etwa $P > 0$ voraussetzen und dann die Bezeichnung der Wurzeln e, e', e'' so wählen, dafs ihre Reihenfolge, wie in dem Schema $P > 0$ von pag. 226, diese wird:

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty.$$

Die Überführung des Integrales (1) in die Form (2′) läfst sich nun allemal durch *lineare Transformation* bewirken, d. h. so, dafs wir die neue Integrationsvariable x gleich einer linearen Funktion der ursprünglichen u setzen. Gleichzeitig läfst sich stets erreichen, dafs die in (2′) vorkommenden Gröfsen x und k reelle Zahlen zwischen 0 und 1 werden. Die Transformationsformeln lauten dabei verschieden, je nachdem das ursprüngliche Integrationsintervall in dem Gebiete ee', $e'e''$, ... liegt.

Handelt es sich z. B. um ein Integral in dem Intervalle ee' mit der unteren Grenze e und der oberen Grenze u, so können wir unsere Transformation so einrichten, dafs die Werte e, e', ∞ bez. in die Werte 0, 1, ∞ übergehen. Alsdann verwandelt sich der zwischen e' und ∞ gelegene Punkt e'' der u-Axe in einen zwischen 1 und ∞ gelegenen Punkt der x-Axe, welchen wir $1/k^2$ nennen, wobei also k^2 einen positiven echten Bruch bedeutet. Gleichzeitig geht die zwischen e und e' gelegene obere Grenze u des ursprünglichen Integrales in die zwischen 0 und 1 gelegene obere Grenze des neuen über.

Die hierzu erforderliche lineare Transformation lautet nun ersichtlich folgendermafsen:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{e''-e}{e'-e} = \frac{1}{k^2}.$$

Unser Polynom U, welchem wir die Form geben können

$$U = c^2 (u-e)(e'-u)(e''-u),$$

unter c^2 den Koeffizienten von u^3, d. h. $\frac{2P}{A}$ verstanden, geht bei Einführung von x in den folgenden Ausdruck über

$$U = c^2 (e'-e)^3 x (1-x)\left(\frac{1}{k^2} - x\right) = \frac{c^2 (e'-e)^3}{k^2} x (1-x)(1-k^2 x).$$

Das ursprüngliche Integral

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{1}{c} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}$$

nimmt daher die Gestalt an:

$$(3)\quad t = \pm \frac{k}{c\sqrt{e'-e}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \pm \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\, F(k, \varphi),$$

wo die Amplitude φ und der Modul k die folgende Bedeutung haben:

$$(3')\qquad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{u-e}{e'-e}}, \quad k = \sqrt{\frac{e'-e}{e''-e}},$$

und wo $F(k, \varphi)$ das in (2) definierte Legendresche Integral ist. Das Vorzeichen von t hängt davon ab, in welcher der in Fig. 38 von pag. 226 schematisch dargestellten Überdeckungen wir die Integration ausführen wollen.

Handelt es sich andrerseits um ein Integral, dessen obere und untere Grenze in dem Gebiete $(-\infty\, e)$ gelegen ist, so wollen wir die Transformationsgleichung zwischen u und x so einrichten, dafs die Punkte $-\infty$, e, e'' bez. in die Punkte 0, 1, ∞ übergeführt werden. Wiederum entspricht dann dem zwischen e und e'' gelegenen Punkte e' ein zwischen 1 und ∞ gelegener Wert von x, welchen wir $1/k'^2$ nennen, so dafs auch k'^2 einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die lineare Transformation, welche die gewünschte Überführung leistet, wird jetzt offenbar:

$$\frac{e''-e}{e''-u} = x,$$

so dafs wir für k'^2 folgenden Wert erhalten

$$\frac{e''-e}{e''-e'} = \frac{1}{k'^2}.$$

Ersetzen wir jetzt u in dem Ausdrucke U durch x, so wird

$$U = -c^2(e-u)(e'-u)(e''-u) = -c^2(e''-e)^3 \frac{x(1-x)(1-k'^2x)}{x^4}.$$

Infolgedessen ergiebt sich, wenn etwa $-\infty$ die untere, $u < e$ die obere Grenze des ursprünglichen Integrals ist:

$$t = \frac{\pm i}{c\sqrt{e''-e}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k'^2x)}} = \pm i \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\, F(k', \varphi);$$

die Amplitude φ und der Modul k' sind dabei nach dem Vorstehenden folgendermafsen bestimmt:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{e''-e}{e''-u}}, \quad k' = \sqrt{\frac{e''-e'}{e''-e}}.$$

Beide Gröfsen genügen wieder den oben gestellten Bedingungen:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k' < 1.$$

Der Modul k', welcher mit dem in (3′) definierten Modul k durch die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

zusammenhängt, heifst übrigens „der zu k komplementäre Modul“.

In ähnlicher Weise gelangt man immer zum Ziele, wie auch das ursprüngliche Integrationsintervall zwischen den Punkten e, e', e'', ∞ gelegen sei, wobei wir nur voraussetzen, dafs es keinen dieser Punkte in seinem Innern enthalte, in welchem Falle wir das Intervall in Teilintervalle zerlegen müfsten. Die allgemeine Regel zur Herstellung der jedesmal geeigneten Transformationsformeln ist folgende:

Man setze auf der u-Axe einen bestimmten Durchlaufungssinn fest und ordne die beiden Verzweigungspunkte, innerhalb deren das ursprüngliche Integrationsintervall liegt, in der Reihenfolge, welche dem Durchlaufungssinn entspricht, den Punkten 0 *und* $+1$ *zu. Sodann gehe man längs der u-Axe, die man sich im Unendlichen geschlossen zu denken hat, im festgesetzten Sinne über das Integrationsgebiet hinaus und ordne den übernächsten Verzweigungspunkt, auf den man dieser Verabredung zufolge stöfst, dem Punkte ∞ zu. Es läfst sich dann immer eine lineare Transformation zwischen u und x angeben, welche die genannte Zuordnung leistet. Dieselbe verwandelt den vierten Verzweigungspunkt, über dessen Zuordnung wir noch nicht disponiert haben, notwendig in einen Punkt, welcher auf der x-Axe zwischen* $+1$ *und* $+\infty$ *liegt; alle Punkte des ursprünglichen Integrationsgebietes entsprechen gleichzeitig Werten von x, welche zwischen* 0 *und* 1 *enthalten sind.*

Übrigens läfst sich die Zuordnung der u- und x-Axe in dieser Weise immer noch auf zwei Arten herstellen, indem ja in unserer Regel der Durchlaufungssinn der u-Axe willkürlich blieb.

Wir wollen noch für vier spezielle Integrale t, welche im sechsten Kapitel eine wesentliche Rolle spielen, die betreffende Transformation auf die Legendresche Normalform hinschreiben. Es sind dieses die folgenden Integrale:

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ia = \int_{-1}^{e} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Das erste derselben haben wir schon im dritten Paragraphen betrachtet, es giebt die Zeit an, welche die Kreiselspitze braucht, um einen Halbbogen ihrer Bahnkurve zu durchlaufen. Die übrigen haben keine mechanische Bedeutung im elementaren Sinne.

Es ergeben sich nun aus den Gleichungen (3) und (4) bez. aus unserer allgemeinen Regel die folgenden Ausdrücke für unsere vier Integrale:

$$(5) \qquad \omega = MF\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad \omega' = MF\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad a = MF(k', \varphi_a),$$
$$b = MF(k', \varphi_b),$$

wo die Zeichen M, k, k', φ_a, φ_b die folgende Bedeutung haben:

$$(5') \quad \begin{cases} M = \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}, \quad k = \sqrt{\frac{e'-e}{e''-e}}, \quad k' = \sqrt{\frac{e''-e'}{e''-e}} = \sqrt{1-k^2} \\ \varphi_a = \arcsin\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}, \qquad \varphi_b = \arcsin\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'} \cdot \frac{1-e'}{1-e}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe, ein beliebiges elliptisches Integral erster Gattung numerisch auszuwerten, ist somit reduziert auf die einfachere Aufgabe, den Wert des Legendreschen Integrales $F(k, \varphi)$ zu finden. Die verschiedenen Wege, welche hierzu führen, sollen in Kürze namhaft gemacht werden.

1. Der nächstliegende Weg wäre der, die Quadratwurzel unter dem Integralzeichen nach dem binomischen Lehrsatz in eine *Reihe* zu verwandeln und die Integration gliedweise auszuführen. Die Reihen, zu denen man so gelangt, sind aber bei einem von Null einigermafsen verschiedenen k^2 nicht hinreichend bequem. Um ihre Konvergenz zu verbessern, müfste man diese Methode mit der sogleich zu nennenden zweiten kombinieren, wie solches in der That bei Schwarz*) durchgehends geschieht.

2. Eine theoretisch und praktisch gleich schöne Methode besteht darin, die Integrationsvariable einer quadratischen Transformation von solcher Beschaffenheit zu unterwerfen, dafs das Integral erster Gattung in ein ebensolches, nur mit verändertem Modul und transformierter Amplitude, übergeht. In erster Linie ist hier die sog. *Landensche Transformation* zu nennen. Der transformierte Modul k_1 wird dabei einfach gleich dem Verhältnis des geometrischen zum arithmetischen Mittel aus dem Modul k und der Zahl 1; man hat also: $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$. Durch fortgesetzte, geeignete Anwendung dieser Transformation wird man auf eine Serie von Moduln k_1, k_2, k_3, ... (eine „Modulleiter“) geführt, deren einzelne Terme unaufhörlich zunehmen und sich dem Werte 1 nähern. Im umgekehrten Sinne ausgeführt, liefert also die Landensche Transformation eine nach 0 abnehmende Modulleiter. Ist aber auf solche Weise der Modul des elliptischen Integrales genügend klein gemacht, so wird die Integration in einfachster Weise ausführbar. In der That haben wir, unter k_n einen genügend kleinen Modul, unter φ_n den zugehörigen transformierten Wert der Amplitude verstanden,

*) Vgl. z. B. Art. 48 der Formelsammlung.

direkt: $F(k_n, \varphi_n) = \varphi_n$. Diese Methode ist von Legendre mit grofsem Erfolge zur Berechnung seiner Tafeln gehandhabt worden.

Die sogenannte *Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels von Gaufs**) ist von der vorgenannten nicht wesentlich verschieden; sie zeichnet sich vor jener nur durch formal gröfsere Eleganz aus.

Statt der *quadratischen* kann man auch *Transformationen höherer Ordnung* zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale verwerten, wie solches zum erstenmale von Jacobi**) durchgeführt worden ist.

3. Eine dritte Methode beruht auf der *Umkehr der elliptischen Integrale* und auf der Einführung der *ϑ-Funktionen*. Sie führt, ebenso wie die vorige Methode, sehr schnell zum Ziele, kann aber an dieser Stelle noch nicht besprochen werden.***)

4. Man könnte ferner daran denken, die elliptischen Integrale direkt durch *mechanische Quadratur*, eventuell mit Zuhülfenahme eines Integrationsapparates auszuwerten. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, auf beliebige elliptische Integrale direkt anwendbar zu sein und macht die Transformation auf die Normalform überflüssig. Andrerseits verlangt dasselbe aber die Berechnung oder Zeichnung der Gröfse $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ bez. $\frac{1}{\sqrt{U}}$ für eine gröfsere Reihe von Punkten des Integrationsintervalles. Hierdurch wird der genannte Vorteil reichlich aufgewogen, so dafs diese Methode mit den übrigen kaum wird konkurrieren können.

5. Eine letzte Methode, welche wir ganz besonders empfehlen möchten, besteht darin, überhaupt nicht zu rechnen, sondern die *Legendreschen Tafeln*†) nachzusehen. In der That werden wir uns dieses schönen Hülfsmittels ebensowenig entschlagen wollen, als wir den Logarithmus einer Zahl anders wie aus den Logarithmentafeln zu finden gewohnt sind. Der Gebrauch der Legendreschen Tafeln ist sehr bequem. Man hat nur nötig, von dem Modul k zu einem Winkel Θ mittels der trigonometrischen Tafeln überzugehen, welcher sich aus der Gleichung $k = \sin \Theta$ bestimmt. Dann findet man für alle vollen

---

*) Gaufs: Ges. Werke, Bd. III, pag. 361 u. ff.

**) Jacobi: Ges. Werke, Bd. I, pag. 31; man vergl. auch Klein-Fricke, Modulfunktionen, II pag. 111.

***) Ausführlich dargestellt von Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen, Berlin 1864, namentlich zu vgl. 1. Abteilung, 4. Abschnitt.

†) Bd. II des traité des fonctions elliptiques, Paris 1826, pag. 284—363 u. pag. 222—245. Es wäre sehr zu wünschen, dafs diese heutzutage ziemlich seltenen Tafeln durch Neuabdruck leichter zugänglich gemacht würden.

Grade von Θ und φ zwischen 0 und 90 den Wert von $F(\sin\Theta, \varphi)$ auf 9 Decimalen genau in den Tabellen. Die sogenannten vollständigen Integrale erster Gattung, d. h. die Werte von $F\left(\sin\Theta, \frac{\pi}{2}\right)$ sind von Legendre sogar noch genauer berechnet. Neben den Integralen erster Gattung geben die Tafeln auch die sogenannten Integrale zweiter Gattung $E(k, \varphi)$ an, auf deren Definition wir hier nicht einzugehen brauchen.

Hiernach wird man auf eine der vorgenannten Methoden nur dann zurückzugreifen gezwungen sein, wenn es sich um die Auswertung eines Integrales erster Gattung mit komplexen Grenzen oder mit komplexem Modul handelt.

Als Beispiel berechnen wir in diesem Sinne etwa die Zeit, welche die Kreiselspitze in den Figuren 24 bis 28 gebraucht, um von einem tiefsten Punkte ihrer Bahn bis zu dem nächstfolgenden höchsten Punkte zu gelangen, d. h. den Wert der halben Periode ω.

Während wir in jenen Figuren früher $P = -1$ voraussetzten, nehmen wir, um unsere letzten Formeln direkt anwenden zu können, $P = +1$, müssen dafür aber (nach pag. 250) die auf pag. 243 angegebenen Werte der Gröfse e' im Vorzeichen umkehren. Überdies würden diese Werte jetzt, da sie die kleinste der in Betracht kommenden Wurzeln von $U = 0$ darstellen, mit e zu bezeichnen sein. Die zweite Wurzel entspricht dem in allen jenen Figuren als Grenzkreis auftretenden Äquator, so dafs wir haben: $e' = 0$. Die noch fehlende Wurzel e'' ergiebt sich darauf aus der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$, welche in unserem Falle (vgl. pag. 240) die einfache Gestalt annimmt

$$u N^2 + 2AP(1 - u^2) = 0.$$

Setzen wir hier $P = 1$ und wie früher auch $A = 1$, so ergiebt sich

$$u^2 - \frac{1}{2} u N^2 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs e'' einfach das Reciproke der auf pag. 243 angegebenen Wurzel wird. Hiernach sind die in Gleichung (5) vorkommenden Gröfsen M, sowie k und der zugehörige Winkel Θ sehr leicht zu berechnen. Den Wert von $\lg F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ entnehmen wir alsdann der Tafel I von Legendre und berechnen die gesuchte Gröfse ω nach Gleichung (5). Das Resultat stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen.

$$A = 1, \quad P = -1, \quad n = 0, \quad e' = 0.$$

Fig.	e''	$\lg_{10} M$	k	Θ	$\lg_{10} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	ω
24	1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	45°	0,26813	1,854
25	$\frac{100}{99}$	0 (circa)	$\sqrt{\frac{9801}{19801}}$	44,7	0,26709	1,848
26	$\frac{10}{9}$	0,99879—1	$\sqrt{\frac{81}{181}}$	42,0	0,25820	1,807
27	2	0,95154—1	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	26,6	0,22007	1,484
28	∞	$-\infty$	unbest.	unbest.	unbest.	0

Wir sehen hieraus, dafs die Durchlaufungsdauer des einzelnen Halbbogens bei wachsendem N fortgesetzt abnimmt, bis sie in Fig. 28 den Wert 0 erreicht. Wenn wir an der Verabredung festhalten, dafs die Werte von A, P, n und N im absoluten Mafssystem aufzufassen sind, so bedeutet der angegebene Wert von ω Sekunden.

Wichtiger noch als die Beziehung zwischen t und u ist für uns die Abhängigkeit zwischen ψ und u, weil uns diese direkt die Gestalt der Bahnkurve liefert. Wir haben uns daher weiter über die Berechnung des elliptischen Integrales ψ zu orientieren.

Um auch hier an Legendre anknüpfen zu können, wollen wir ψ durch die sogenannten *Normalintegrale dritter Gattung von Legendre* ausdrücken. Sein Normalintegral dritter Gattung definiert Legendre folgendermafsen:

$$\Pi(k, \varphi, p) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 - p \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Die Gröfse p, welche bei Legendre als reell vorausgesetzt wird und welche übrigens, damit das auf reellem Wege genommene Integral einen Sinn hat, nicht zwischen $+1$ und $+\infty$ liegen darf, heifst der *Parameter* des Integrales.

Wir wollen zeigen, dafs sich ψ als lineare Kombination zweier Normalintegrale dritter Gattung darstellen läfst.

Zu dem Zwecke zerlegen wir zunächst den unter dem Integralzeichen vorkommenden Faktor $\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}$ in Partialbrüche, d. h. wir setzen

$$\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} = \frac{1}{2A}\left(\frac{n + N}{1 + u} + \frac{n - N}{1 - u}\right),$$

so dafs wir erhalten:

$$\psi = \frac{n+N}{2A}\int \frac{1}{1+u}\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{n-N}{2A}\int \frac{1}{1-u}\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Ferner werden wir die Gröfse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ durch eine der oben angegebenen Transformationen auf die Form $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$ bringen. Wir können uns dabei auf den Fall beschränken, dafs die ursprüngliche Integrationsvariable in dem Gebiete ee' verläuft. Alsdann haben wir diejenige Transformation anzuwenden, welche oben zu der Gleichung (3) führte, wir haben also die neue Integrationsvariable x durch die Gleichung zu definieren:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x.$$

Hieraus ergiebt sich

$$1 \pm u = (1 \pm e) \pm (e'-e)\,x,$$

während sich gleichzeitig die Gröfse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ ebenso transformiert, wie in (3). Der Ausdruck von ψ wird daher:

$$\psi = \frac{n+N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int \frac{1}{1+e+(e'-e)x}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$
$$+ \frac{n-N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int \frac{1}{1-e-(e'-e)x}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Um von hier aus die Legendresche Normalform herzustellen, haben wir nur $x = \sin^2\varphi$ zu setzen und bezw. $1+e$ oder $1-e$ aus dem ersten oder zweiten Integrale herauszuziehen. *Dann ergiebt sich direkt ψ als lineare Kombination zweier Normalintegrale in der Form*

$$\psi = C_1\Pi(k, \varphi, p_1) + C_2\Pi(k, \varphi, p_2),$$

wo die Gröfsen k, φ durch die früheren Gleichungen (3′) definiert sind und wo die C_1, C_2, p_1, p_2 die folgende Bedeutung haben:

$$C_1 = \frac{n+N}{1+e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}}, \qquad C_2 = \frac{n-N}{1-e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}},$$
$$p_1 = \frac{e'-e}{1+e}, \qquad p_2 = -\frac{e'-e}{1-e}.$$

Es würde also des Weiteren nur noch nötig sein, die numerischen Werte der Legendreschen Normalintegrale dritter Gattung auf möglichst einfachem Wege zu finden. Leider giebt es und kann es zu diesem Zwecke keine Tafeln geben. Da nämlich der Wert des Integrales $\Pi(k, \varphi, p)$ von drei veränderlichen Gröfsen abhängt, müfsten die in Rede stehenden Tafeln Tafeln mit dreifachem Eingange sein. Solche Tafeln lassen sich aber nur mit unverhältnismäfsiger Mühe berechnen und überhaupt nicht drucken.

Immerhin können wir auch hier aus den Legendreschen Tabellen Nutzen ziehen, wenn wir uns auf die Berechnung der sog. „vollständigen Integrale dritter Gattung“ $\Pi\left(k, \frac{\pi}{2}, p\right)$ beschränken, was für unsere Bahnkurven bedeuten würde, dafs wir nur nach der Spannweite $2\psi_\omega$ der einzelnen Teilbögen fragen und auf die Konstruktion der einzelnen Kurvenpunkte verzichten. Wie nämlich Legendre*) gezeigt hat, lassen sich seine vollständigen Integrale dritter Gattung allemal auf Integrale der ersten und zweiten Gattung reduzieren, welche in ihren oberen Grenzen den Parameter p enthalten und welche zum Modul teils den Modul k des Integrales Π, teils den komplementären Modul haben. Da wir nun die Werte der Integrale erster und zweiter Gattung in den Tafeln direkt nachsehen können, so gestatten diese Reduktionsformeln die vollständigen Integrale dritter Gattung und mithin auch die Gröfse von ψ_ω verhältnismäfsig schnell zu finden, von deren Wert die Gestalt der Bahnkurve in erster Linie abhängt.

Auf diesem Wege sind die Spannweiten der Teilbögen in den Figuren des ersten Paragraphen berechnet worden.**) Auf die Ausführung dieser Rechnungen, sowie auf die eigentliche Bedeutung der Reduktionsformeln wollen wir indessen an dieser Stelle nicht eingehen, da wir im sechsten Kapitel die oben unter (3) genannte Methode ausführlich behandeln werden, welche jedesmal beliebig viele Punkte der Bahnkurve auf kürzestem Wege zu finden lehrt.

§ 9. Über angenäherte Berechnung der Kreiselbahnen.

Der Gegensatz zwischen angenäherter und genauer Rechnung ist im allgemeinen kein scharfer. Jede numerische Rechnung wird, sofern es sich nicht zufällig um rationale Zahlen handelt, immer nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit durchgeführt. Der Gegensatz sollte eigentlich nicht heifsen: *„Genaue und angenäherte Berechnung“*, sondern vielmehr *„Rechnung mit beliebiger und mit begrenzter Annäherung“*. Während die Berechnung der elliptischen Integrale nach den Methoden des vorigen Paragraphen, (sofern wir nicht gerade die Legendreschen Tafeln benutzen), bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann, werden wir die jetzt auseinanderzusetzenden

*) Vgl. den ersten Band des *Traité*, Kap. 23, wo je nach dem Werte des Parameters drei verschiedene Reduktionsformeln aufgestellt werden, sowie auch das oben genannte Buch von Schellbach, Abt. 1, Abschn. 10.

**) Ich habe mit Dank zu erwähnen, dafs ich bei dieser Berechnung durch Hrn. stud. math. Blumenthal in ausgiebiger Weise unterstützt worden bin.

A. Sommerfeld.

Methoden nicht soweit führen, dafs sie eine beliebige Verschärfung ohne Weiteres zulassen — ein Verfahren, welches sehr häufig in praktischen Anwendungen Platz greift.

Sollen derartige Methoden von begrenzter Genauigkeit einen wirklichen Wert haben, so müssen wir vor allem fordern, dafs wir den begangenen Fehler abschätzen können. Dieser Forderung werden wir im Folgenden genüge leisten. Zeigt es sich nun, dafs der Fehler unterhalb der für den vorliegenden Zweck zulässigen Fehlergrenze liegt, so wird uns unsere angenäherte Berechnung dieselben Dienste leisten, wie eine beliebig genau zu gestaltende. In der That werden wir später die interessantesten Fälle der Kreiselbewegung gerade mit den jetzt zu betrachtenden Methoden von begrenzter Genauigkeit behandeln.

Wir betrachten zunächst das elliptische Integral erster Gattung

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}},$$

welchem wir (vgl. pag. 261) die Form geben können

$$\sqrt{\frac{2P}{A}}\, t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}.$$

Dabei setzen wir, wie im vorigen Paragraphen, voraus

$$P > 0 \quad \text{und} \quad -1 < e < e' < +1 < e''.$$

Die Variable u ist während der Integration zwischen die Grenzen e und e' eingeschränkt. Jedenfalls wird daher

$$e'' - e' < e'' - u < e'' - e.$$

Der Integrand ist positiv, solange sich u in der oberen Überdeckung der u-Axe befindet. Indem wir nun für $e'' - u$ den zu kleinen Wert $e'' - e'$ oder den zu grofsen $e'' - e$ einsetzen, vergröfsern oder verkleinern wir den Wert des Integrales. Wir haben daher, solange wir die Integrationsvariable den Verzweigungspunkt e' nicht überschreiten lassen:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{e''-e}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} < \sqrt{\frac{2P}{A}}\, t < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}}.$$

Die zuletzt hingeschriebenen Integrale lassen sich leicht trigonometrisch ausführen. Wir setzen etwa zu dem Zwecke:

$$(2) \qquad e' + e = 2u_0, \quad e' - e = 2\varepsilon, \quad u - u_0 = \delta.$$

Hier bedeutet ε den halben Vertikalabstand der beiden Begrenzungskreise, innerhalb deren die Bahnkurve verläuft; u_0 bestimmt denjenigen Parallelkreis, dessen Ebene in der Mitte liegt zwischen den Ebenen der Begrenzungskreise, oder, wie wir kurz sagen wollen, den „mittleren Parallelkreis der Bahnkurve". δ mifst den Abstand der Kreiselspitze von der Ebene dieses mittleren Parallelkreises. Wir erhalten daraufhin

$$u - e = \varepsilon + \delta, \quad e' - u = \varepsilon - \delta \tag{3}$$

und

$$\int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} = \int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}} = \arcsin\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Mithin wird nach (1)

$$\frac{1}{\sqrt{e''-e}} \arcsin\frac{\delta}{\varepsilon} < \sqrt{\frac{2P}{A}}(t - t_0) < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \arcsin\frac{\delta}{\varepsilon},$$

wo $t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{2P}}$ gesetzt ist. Zählen wir im Folgenden die Zeit von demjenigen Momente an, wo die Kreiselspitze durch den mittleren Parallelkreis u_0 hindurchgeht, so können wir statt $t - t_0$ einfacher t schreiben.

Wir haben also zwei Grenzen gefunden, zwischen denen die (so gezählte) Zeit t liegen mufs, nämlich die untere Grenze

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}} \arcsin\frac{\delta}{\varepsilon}$$

und die obere

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e')}} \arcsin\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Die fraglichen Näherungsformeln erhalten wir nun einfach, indem wir für t einen zwischen diesen beiden Grenzen gelegenen mittleren Wert substituieren.

Wir ersetzen etwa in den vorigen Formeln $\sqrt{e''-e}$ und $\sqrt{e''-e'}$ durch den mittleren Wert $\sqrt{e''-u_0}$ und schreiben:

$$t = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}} \arcsin\frac{\delta}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Wir wollen vor allem den Fehler abschätzen, den wir hierbei begehen. Derselbe heifse τ und werde in Bruchteilen des ganzen Wertes von t berechnet. Sicher wird τ, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als die Differenz unserer beiden Grenzwerte, dividiert durch den kleineren von ihnen. Wir haben also

$$|\tau| < \frac{\sqrt{\frac{1}{e''-e'}} - \sqrt{\frac{1}{e''-e}}}{\sqrt{\frac{1}{e''-e}}}$$

oder

$$|\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1. \tag{5}$$

Die so gefundene obere Grenze für den „relativen" Fehler $|\tau|$ hängt enge mit dem Legendreschen Modul k des elliptischen Integrales t zusammen. Nach Gleichung (5′) des vorigen Paragraphen ist nämlich

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} = \frac{1}{k'} = \sqrt{\frac{1}{1-k^2}};$$

mithin gilt

$$|\tau| < \frac{1-k'}{k'}. \tag{6}$$

Beispielsweise können wir unsere Näherungsformel dazu benutzen, um die Zeitdauer ω zu berechnen, welche die Kreiselspitze braucht um von dem unteren Parallelkreise $u = e$ bez. $\delta = -\varepsilon$ bis zu dem oberen $u = e'$ bez. $\delta = \varepsilon$ zu gelangen. Aus (4) ergiebt sich der Näherungswert

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi. \tag{7}$$

Wollen wir gleichzeitig den Genauigkeitsgrad dieser Formel zum Ausdruck bringen, so können wir schreiben, unter ϑ einen unbekannten echten Bruch verstanden:

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi\left\{1 \pm \vartheta\left(\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1\right)\right\}. \tag{7′}$$

Wir wollen uns schon hier mit einem Gedanken vertraut machen, der erst im sechsten Kapitel zur vollen Geltung kommen wird. Offenbar ist es vom analytischen Standpunkte aus bequem, in Gleichung (4) von der (unendlich vieldeutigen) Arcus-Sinus-Funktion zu der (eindeutigen) Sinus-Funktion überzugehen. Dies entspricht auch durchaus dem Sinne des mechanischen Problems, bei welchem man doch wünschen wird, die Lage des Kreisels als Funktion der Zeit, statt umgekehrt die Zeit aus der Lage der Kreiselspitze zu berechnen. Wir werden also die Gleichung (4) *umkehren*, indem wir δ bez. u als explicite Funktion von t ausdrücken. Wir bekommen so:

$$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} \tag{8}$$

oder nach (2):

$$u = u_0 + \delta = u_0 + \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}. \tag{8′}$$

Die entsprechende *Umkehrung* der ursprünglich gewonnenen unendlich vieldeutigen Integrale werden wir später auch an unseren elliptischen Formeln vornehmen.

Unter besonderen Umständen kann es eintreten, dafs der oben bestimmte Fehler τ sehr klein wird. Dann leisten uns unsere Näherungsformeln dieselben Dienste wie die früheren exakten Gleichungen. Die Umstände, unter denen dieses stattfindet, lesen wir aus der Ungleichung (5) ab: Es mufs entweder nahezu $e = e'$ oder es mufs e'' sehr grofs werden. Beide Möglichkeiten zusammenfassend, können wir sagen: es müssen von den vier Verzweigungspunkten e, e', e'', ∞ entweder die beiden ersten, oder die beiden letzten einander sehr nahe rücken.

Die erste Möglichkeit tritt ein, wenn wir von der regulären Präcession, bei welcher e' genau gleich e wird, durch eine kleine Abänderung der Integrationskonstanten zu einer wenig davon verschiedenen Bewegung übergehen. Solche *„der regulären Präcession benachbarte Bewegungen"* sollen im ersten Paragraphen des nächsten Kapitels behandelt und durch Näherungsformeln im Sinne dieses Paragraphen dargestellt werden. Ebendahin gehört auch die *Bewegung des „aufrechten Kreisels" im stabilen Falle*, bei genügend kleiner äufserer Störung (vgl. § 4 und 5 des folgenden Kapitels).

Um zu entscheiden, wann die zweite Möglichkeit, der Fall eines sehr grofsen Wertes von e'', eintritt, wollen wir e'' durch unsere Integrationkonstanten n, N u. s. w. ausdrücken.

Da e' und e'' als Wurzeln der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ bestimmt wurden, ergiebt sich der Wert von $e' + e''$, wenn wir den negativ genommenen Koeffizienten von u in dieser Gleichung durch den von u^2 dividieren. Wir finden also aus Gleichung (2) von pag. 240

$$e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1 - e^2)} - e'. \tag{9}$$

Dieser Wert wächst im allgemeinen mit wachsendem n und N, sowie mit abnehmendem P. Es möchte zunächst so scheinen, als ob auch im Falle e gleich oder nahezu gleich ± 1 der Wert von e'' unendlich bez. sehr grofs würde. Dem ist aber nicht so, weil alsdann gleichzeitig mit dem Nenner auch der Zähler verschwindet. Es bedeutet nämlich der Zähler geometrisch das Quadrat der Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte der Impulskomponente n und der Impulskomponente N in der Anfangslage $u = e$. Ist nun $e = \pm 1$, so wird diese Verbindungsstrecke ersichtlich gleich Null.

Mithin wird e'' nur dann sehr grofs, wenn eine der Impulskomponenten n, N sehr grofs wird, oder, genauer gesagt, wenn das Quadrat einer dieser Gröfsen im Verhältnis zu der gleichbenannten Gröfse AP

eine sehr beträchtliche Zahl darstellt. Dies war pag. 253 u. ff. bei Untersuchung der *Grenzfälle* $n = \infty$, $N = \infty$ der Fall. Wir sehen daher jetzt den Grund ein, weshalb wir in jenen Grenzfällen die Darstellung der Bewegung durch elliptische Integrale entbehren konnten; es würde nunmehr auch leicht sein, den Fehler τ in den früheren Annäherungsformeln genauer abzuschätzen.

Die von uns sogenannte *„pseudoreguläre Präcession"* können wir ebensowohl der ersten wie der zweiten der auf voriger Seite unterschiedenen Möglichkeiten zurechnen. Bei dieser Bewegung, die gleichfalls im nächsten Kapitel untersucht werden soll, wird daher die Anwendung unserer Annäherungsformeln ebenfalls nur einen sehr geringen Fehler ergeben.

Alle diese Einzelfälle sind vom Standpunkte der elliptischen Integrale dadurch charakterisiert, dafs nach (5) der komplementäre Modul k' nahezu gleich 1, d. h. der Legendresche Modul k selbst nahezu gleich Null wird. Dafs wir in einem solchen Falle die Theorie der elliptischen Integrale entbehren und die Bewegung mit grofser Annäherung durch elementare Funktionen darstellen können, ist nach dem vorigen Paragraphen von vornherein klar. Bei verschwindendem Modul k geht nämlich das Legendresche Normalintegral $F(k, \varphi)$ (s. Gleichung (2) von pag. 260) direkt in den Wert der Amplitude φ über, wobei sich φ mittelst der ursprünglichen Variabeln u bez. δ als ein Arcus-Sinus ausdrückt. Dies entspricht genau der im Vorstehenden gegebenen angenäherten Darstellung der Bewegung. Der Fortschritt der jetzigen Betrachtung besteht lediglich darin, dafs wir nunmehr bei nicht verschwindendem k die Gröfse des Fehlers in unsern Annäherungsformeln nach (6) durch die Gröfse von k abschätzen können.

Wir mögen hier noch einmal an die oben geschilderte Berechnung der elliptischen Integrale nach der Methode von Legendre oder Gaufs erinnern. Wie erwähnt, beruht diese Methode auf der fortgesetzten Anwendung gewisser quadratischer Transformationen, welche den Erfolg haben, den Modul des Integrales successive zu verkleinern. In einem derjenigen Fälle nun, wo unsere Annäherungsformeln nur einen geringen Fehler ergeben, wird die Anwendung jener Transformationen überflüssig, indem der Modul von vornherein so klein ist, dafs wir ohne erheblichen Fehler die Integrale direkt auf elementarem Wege auswerten können.

Bei den oben genannten Spezialfällen der pseudoregulären Präcession, der aufrechten Kreiselbewegung u. s. w., liegt also von selbst derjenige Grenzfall vor, den Gaufs und Legendre durch genügend häufige Anwendung ihrer Transformationsmethoden zu erreichen streben.

Aufser den Näherungsformeln für u werden wir solche für ψ brauchen. Wir haben dabei von der Gleichung (6) von pag. 238 auszugehen:

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}. \tag{10}$$

Die rechte Seite zerlegen wir praktischer Weise in Partialbrüche, wie bereits pag. 267 geschehen und erhalten:

$$\psi' = \frac{n+N}{2A(1+u)} + \frac{n-N}{2A(1-u)}. \tag{11}$$

Hier setzen wir, wie in Gleichung (2) von pag. 270, $u = u_0 + \delta$ und nehmen mit dem Ausdrucke $(1 \pm (u_0 + \delta))^{-1}$ eine identische Umformung vor. Es gilt, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u_0} - \frac{\delta}{(1+u_0)^2} + R_+, \quad R_+ = \frac{\delta^2}{(1+u_0)^2}\,\frac{1}{1+u},$$
$$\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u_0} + \frac{\delta}{(1-u_0)^2} + R_-, \quad R_- = \frac{\delta^2}{(1-u_0)^2}\,\frac{1}{1-u}.$$

Gleichung (11) geht daher über in

$$\psi' = \frac{n+N}{2A(1+u_0)} + \frac{n-N}{2A(1-u_0)} - \delta\left(\frac{n+N}{2A(1+u_0)^2} - \frac{n-N}{2A(1-u_0)^2}\right) + \left(\frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_-\right). \tag{12}$$

Sodann führen wir für δ den Näherungswert aus Gleichung (8) ein. Wir haben, wenn wir die Genauigkeitsgrenze τ in unserer Formel zum Ausdruck bringen:

$$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta\tau)\,t\right\}.$$

Hierfür schreiben wir auf Grund des Mittelwertsatzes bez. der mit dem ersten Gliede abgebrochenen Taylorschen Entwicklung:

$$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + r,$$
$$r = \varepsilon\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,\vartheta\cdot\tau\cdot t\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta'\tau)\,t\right\}, \tag{13}$$

wobei ϑ' ebenso wie vorher ϑ einen echten Bruch bedeutet.

Die Gleichung (12) nimmt daraufhin, wenn wir die Glieder passend zusammenfassen, folgende Gestalt an:

$$\psi' = \frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)} + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,\varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + R,$$
$$R = \frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_- + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,r. \tag{14}$$

Jetzt führen wir die Integration nach t aus; wir erhalten, wenn wir von einer unwesentlichen Integrationskonstanten absehen, welche den Wert von ψ für $t = 0$ bestimmt, ein Glied, welches proportional mit t anwächst, ein zweites, welches periodisch veränderlich ist, und endlich ein Restglied.

Die in Rede stehende angenäherte Darstellung von ψ soll nun einfach darin bestehen, dafs wir in der so erhaltenen Gleichung das Restglied zunächst unterdrücken und setzen:

$$(14') \quad \psi = \frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)}\,t + \frac{N(1+u_0^2) - 2nu_0}{(1-u_0^2)^2\sqrt{2AP(e''-u_0)}}\,\varepsilon\cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}.$$

Den Grad der Annäherung würden wir nachträglich durch Diskussion des Restgliedes festzustellen haben.

Die Gleichungen (8′) *und* (14′) *zusammengenommen liefern eine angenäherte Darstellung für die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche im allgemeinen zwar mit erheblichen Fehlern behaftet sein wird, unter Umständen aber die exakten Formeln mit Vorteil zu ersetzen vermag.*

Diese Darstellung läfst eine sehr anschauliche Deutung zu. Wir wollen zunächst die beiden Teilbewegungen einzeln betrachten, welche bez. durch die beiden ersten oder die beiden zweiten Terme besagter Gleichungen dargestellt werden. Die beiden ersten Terme sind:

$$u_1 = u_0, \quad \psi_1 = \frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)}\,t.$$

Sie definieren eine *reguläre Präcession*, bei welcher der mittlere Parallelkreis u_0 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)}$ durchlaufen wird. Die beiden zweiten Terme:

$$u_2 = \varepsilon\,\sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\},$$

$$\psi_2 = \frac{N(1+u_0^2) - 2nu_0}{(1-u_0^2)^2\sqrt{2AP(e''-u_0)}}\,\varepsilon\cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}$$

sind harmonisch veränderliche Gröfsen von derselben Periode und ungleicher Amplitude; sie stellen, für sich betrachtet, eine *elliptische Schwingung* dar. Die letztere bezeichnen wir auch, indem wir einen in der Astronomie gebräuchlichen Ausdruck aufnehmen, als *Nutation* der Kreiselspitze.

Die Gesamtbewegung, wie sie durch unsere Näherungsformeln beschrieben wird, entsteht aus der Überlagerung der soeben beschriebenen Teilbewegungen. *Unsere Formeln stellen also die Bewegung der Kreiselspitze dar als Überlagerung einer regulären Präcession mit einer periodisch sich wiederholenden Nutation.* Wir haben uns zu denken, dafs die Kreisel-

spitze auf dem mittleren Parallelkreise u_0 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entlang geführt wird und gleichzeitig relativ zu diesem ihre Nutationsschwingung ausführt. Man wolle in diesem Sinne die Figuren des § 2 einer nochmaligen Betrachtung unterziehen und sich die Beschaffenheit der in jedem Falle erforderlichen Präcession und Nutation vorstellen. Besonders naheliegend und fruchtbar wird diese Vorstellung bei der die pseudoreguläre Präcession darstellenden Fig. 28.

Die Hauptfrage, die nach dem *Genauigkeitsgrad unserer Näherungsformeln*, bleibt nun zu besprechen. Der Genauigkeitsgrad unserer Formel für u ist oben in durchaus befriedigender Weise bestimmt worden. In jedem einzelnen numerisch bestimmten Falle hat auch die Fehlerbestimmung in unserer Formel für ψ keine Schwierigkeit. Unter allgemeinen Voraussetzungen läfst sich aber dieser Fehler nicht so glatt abschätzen. Wir müfsten sonst eine Reihe von Spezialfällen je nach dem Vorzeichen der Gröfsen n, N, u_0 u. s. w. unterscheiden. Es mögen daher hierüber einige wenige Bemerkungen genügen.

Bei der Fehlerbestimmung in (14′) haben wir an den in (14) angegebenen Wert des Restes R anzuknüpfen, durch welchen sich der Fehler f folgendermafsen berechnet

$$f = \int R\,dt;$$

f bedeutet dabei (im Gegensatz zu dem obigen Fehler τ) nicht den relativen, sondern den absoluten Fehler.

Wir werden wesentlich den speziellen Fall betrachten, wo die beiden Parallelkreise e und e' hinreichend nahe aneinanderliegen, wo also $2\varepsilon = e' - e$ eine kleine Gröfse ist. In diesem Falle wurde auch der Fehler τ bei unserer obigen Fehlerabschätzung sehr klein und zwar verschwindet er nach (5) bei verschwindendem ε von der ersten Ordnung. Von den drei Termen nun, aus denen sich R in Gleichung (14) zusammensetzt, enthalten zwei, nämlich die mit R_+ und R_- multiplizierten, den Faktor ε^2, weil δ den Faktor ε enthält; der dritte Term (vgl. den obigen Ausdruck für r) besitzt den Faktor $\varepsilon\tau$. Wir können daher sagen, dafs R bei verschwindendem ε von der zweiten Ordnung verschwindet, während die in unseren Näherungsformeln beibehaltenen Glieder höchstens von der ersten Ordnung in ε Null werden. *Mithin stellt bei hinreichend kleinem ε unser Fehler f einen beliebig kleinen Bruchteil der rechten Seite von Gleichung* (14′) *dar. In diesem Falle geht also die begrenzte Annäherung unserer Formeln* (8′) *und* (14′) *in eine beliebige Annäherung über.*

Eine Ausnahme ist dabei wohl zu beachten. Im Nenner von R kommt der Term $1 - u_0^2$ bez. $1 \pm u$ vor. Nimmt einer dieser

Faktoren in demselben Maſse ab, wie die Parallelkreise e und e' zusammenrücken, so kann die Kleinheit des Zählers in R durch die des Nenners aufgewogen werden. Die vorstehende Aussage gilt daher nur dann, wenn die Bahn der Kreiselspitze nicht in unmittelbarer Nähe des Nord- oder Südpols der Einheitskugel verläuft. In einem solchen Falle könnten, selbst bei beliebig kleinem ε, unsere Näherungsformeln ein ganz falsches Bild der Bewegung liefern. Wir werden daher im folgenden Kapitel (vgl. § 5) die in der Nähe der Pole stattfindenden Bewegungen einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Zum Schlusse ein Wort über das Verhältnis unserer jetzigen Berechnungsweise des elliptischen Integrals erster Gattung zu den Methoden des vorigen Paragraphen.

Wenn wir den Faktor $(e''-u)^{-\frac{1}{2}}$ bei der Aufstellung von Formel (4) durch die konstante Gröſse $(e''-u_0)^{-\frac{1}{2}}$ ersetzen, so kommt dies auf dasselbe hinaus, wie wenn wir jenen Term nach aufsteigenden Potenzen von $u-u_0$ entwickeln und die Entwickelung mit dem konstanten Gliede abbrechen. Es liegt nun nahe, statt des ersten mehrere Glieder bez. die ganze Entwickelung zur Berechnung von t beizubehalten. Im letzteren Falle entsteht eine konvergente unendliche Reihe von Termen, welche sich sämtlich durch cyklometrische Funktionen ausdrücken lassen. Berücksichtigen wir eine genügende Anzahl von ihnen, so können wir ganz allgemein den Grad der Annäherung nach Belieben verbessern. Man sieht also: *Unser Näherungsverfahren von begrenzter Genauigkeit kommt, in dieser Weise ausgestaltet, auf die pag.* 264 *unter* (1) *genannte Reihenmethode von beliebiger Genauigkeit zurück.*

Kapitel V.

Über besondere Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels, namentlich über die pseudoreguläre Präcession sowie über die Stabilität der Bewegungen.

§ 1. Die reguläre Präcession und ihr benachbarte Bewegungsformen.

In diesem Kapitel wollen wir einige spezielle Bewegungen des Kreisels, z. B. die reguläre Präcession und namentlich die von uns als pseudoreguläre Präcession bezeichnete Bewegung genauer untersuchen. Dabei wird die grofse Frage nach der *Stabilität der Bewegungen* im Vordergrunde unseres Interesses stehen, eine Frage, welche in neuerer Zeit vielfach in Angriff genommen ist, aber bisher nicht mit der nötigen Schärfe und Klarheit formuliert zu sein scheint.

Wir beginnen mit der Untersuchung der regulären Präcession des Kugelkreisels vom Trägheitsmomente A. Als Grenzfall aus der allgemeinen Bewegung des Kreisels erhalten wir sie, wenn wir die beiden Parallelkreise $u = e$ und $u = e'$, zwischen welche die Bahnkurve der Kreiselspitze eingeschlossen ist, zusammenrücken lassen. Berücksichtigen wir noch, dafs e und e' Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$ sind, so können wir sagen: *Analytisch ist die reguläre Präcession dadurch charakterisiert, dafs die Gleichung* $U = 0$ *eine zwischen* -1 *und* $+1$ *gelegene Doppelwurzel erhält.* Es mufs daher neben U auch der Differentialquotient $\frac{dU}{du}$ für $u = e$ verschwinden. Bilden wir diesen nach den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240, so erhalten wir die Bedingung:

$$A\,\frac{n - Ne}{A(1-e^2)}\,\frac{N - ne}{A(1-e^2)} = P, \tag{1}$$

welche, wie schon pag. 252 bemerkt wurde, mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gefolgerten Gleichung $A\mu\nu = P$ identisch ist.

Eigentümlicher Weise versagt in diesem einfachsten Falle der Kreiselbewegung unsere allgemeine Integrationsmethode. Wenn nämlich $e = e'$ wird, so zieht sich der Integrationsweg für u in den Ausdrücken von

t, ψ und φ auf einen einzelnen Punkt zusammen und unsere Integrale verlieren zunächst ihren Sinn. Wir gehen daher lieber auf die nicht-integrierten Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N - nu}{A(1-u^2)}$$

zurück und verifizieren direkt, dafs sie erfüllt sind, wenn wir

$$(3)\qquad \cos\vartheta = u = e, \quad \psi = \nu t, \quad \varphi = \mu t$$

machen. In der That geht die erste Gleichung für $u = e = \text{const}$ über in $0 = 0$; die beiden letzten Gleichungen werden ebenfalls befriedigt, wenn wir die Gröfsen ν und μ mittelst der Integrationskonstanten n, N und e folgendermafsen bestimmen:

$$(4)\qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1-e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1-e^2)}.$$

Hierbei haben wir auf einen merkwürdigen Widerspruch mit dem Vorhergehenden aufmerksam zu machen, der aber nur formaler Natur ist. Unsere letzte Betrachtung zeigt, dafs die Gleichungen (2) bei ganz beliebiger Wahl der Integrationskonstanten e, n und N und entsprechender Bestimmung der Konstanten ϑ, μ und ν durch die Gleichungen (3) erfüllt werden. Es möchte daher scheinen, als ob die reguläre Präcession bei beliebigen Anfangsbedingungen eine mögliche Bewegung darstellt, während doch oben behauptet wurde und aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht, dafs sie es nur dann ist, wenn zwischen den Integrationskonstanten die Bedingung (1) besteht.

Um die Notwendigkeit dieser letzteren Bedingung direkt zu erhärten, gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung zurück, welche wir etwa in der Lagrangeschen Form zu Grunde legen. Dieselben lauten nach pag. 154, wenn wir für die Komponenten Θ, Φ, Ψ der äufseren Kraft die pag. 220 angegebenen Werte eintragen und für T den Ausdruck (6) von pag. 156 mit $C = A$ benutzen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d[\Theta]}{dt} = -A\varphi'\psi'\sin\vartheta + P\sin\vartheta, \quad \dfrac{d[\Psi]}{dt} = 0, \quad \dfrac{d[\Phi]}{dt} = 0. \\ [\Theta] = A\vartheta', \quad [\Psi] = A(\psi' + \varphi'\cos\vartheta), \quad [\Phi] = A(\varphi' + \psi'\cos\vartheta). \end{cases}$$

Setzen wir hier den Gleichungen (3) entsprechend $\vartheta' = 0$, $\psi' = \nu$, $\varphi' = \mu$, so folgt aus der zweiten Reihe $[\Theta] = 0$, $[\Psi] = \text{const.}$, $[\Phi] = \text{const.}$; in der ersten Reihe werden alsdann die beiden letzten Gleichungen identisch befriedigt, während die erste Gleichung unsere frühere Bedingung (1) liefert:

$$A\mu\nu = P.$$

Infolgedessen kann nach unseren ursprünglichen Gleichungen in der That nur eine gewisse Klasse von regulären Präcessionsbewegungen, welche eben durch die Gleichung (1) *charakterisiert wird, auftreten.*

Wir werden aber weiter dem Grunde nachzugehen wünschen, weshalb die Gleichungen (2) Integrale besitzen, welche in den allgemeinen Differentialgleichungen (5) nicht enthalten sind. Zu dem Zwecke müssen wir uns ein wenig über die Bedeutung unserer Differentialgleichungen in geometrischer Auffassung verbreiten.

Dabei möge es der kürzeren Ausdrucksweise wegen gestattet sein, nur von den Differentialgleichungen für u und ψ zu sprechen.

Die Differentialgleichungen (2) bestimmen für jeden Punkt (u, ψ) der Bahnkurve eine gewisse Fortschreitungsrichtung $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ oder auch, wenn wir wollen, eine gewisse Geschwindigkeit $\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)$. Wir wollen uns in jedem Punkte des stereographischen Bildes der Einheitskugel die betreffende Fortschreitungsrichtung als eine Art Wegweiser markiert denken. Den Inbegriff des einzelnen Punktes und des zugehörigen Wegweisers bezeichnen wir im Anschluſs an eine heute übliche Ausdrucksweise als *Linienelement.*

Die Differentialgleichungen integrieren heiſst nun, eine Kurve angeben, welche aus lauter solchen Linienelementen zusammengesetzt ist, oder einen Weg beschreiben, welcher überall in Richtung der Wegweiser verläuft.

Auf Grund dieser Definition sieht man unmittelbar, daſs jede beliebige reguläre Präcession (n, N, e), welche wir erhalten, wenn wir N und n irgendwie und e so wählen, daſs die Gleichung $U = 0$ erfüllt ist, den Differentialgleichungen (2) genügen muſs. Betrachten wir nämlich zunächst diejenige allgemeine Bahnkurve vom Charakter der im vorigen Kapitel beschriebenen Kurven, welche den Integrationskonstanten n, N und e entspricht, und konstruieren wir uns die ganze Schaar von Bahnkurven hinzu, welche entsteht, wenn wir jene erste Kurve um den Mittelpunkt der Figur (um das Bild des Nordpols) drehen (vgl. Fig. 46). Alle diese Kurven sind natürlich Integralkurven von (2); sie berühren überdies alle den Parallelkreis $u = e$. Infolgedessen stellt jedes kleinste Stück des Parallelkreises $u = e$ ein Linienelement dar, welches unseren Differentialgleichungen entspricht. Dieser Parallelkreis selbst ist daher eine Inte-

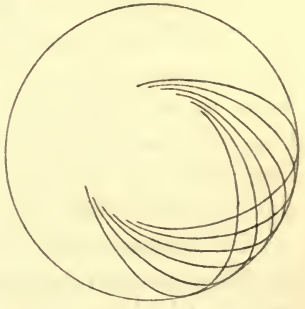


Fig. 46.

gralkurve der Gleichungen (2), gleichviel ob die Bedingung (1) zwischen e, n und N erfüllt ist oder nicht.

Unsere Betrachtung läfst sich sofort auf beliebige Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern: Wenn wir eine Schaar von Integralkurven solcher Gleichungen kennen und die Enveloppe der Schaar konstruieren, so genügt diese gleichfalls den Differentialgleichungen. Man bezeichnet diese besondere Art von Integralkurven als *singuläre Lösungen*, weil sie sich aus den allgemeinen Lösungen durch Spezialisierung der Konstanten nicht ergeben.

Mit Benutzung dieses terminus können wir daher sagen: *Die reguläre Präcession ist allerdings bei beliebiger Wahl der Konstanten e, n und N eine Lösung der Differentialgleichungen* (2), *aber eine singuläre Lösung.*

Man begreift nun leicht, dafs die singulären Lösungen von (2) nicht auch Lösungen der Differentialgleichungen (5) zu sein brauchen. Machen wir nämlich bei letzteren eine der obigen ähnliche Betrachtung, so haben wir hier nicht von Linienelementen schlechtweg, sondern etwa von *Linienelementen zweiter Ordnung* zu sprechen. Es werden jetzt, nachdem ein Punkt und eine hindurchgehende Fortschreitungsrichtung irgendwie ausgewählt sind, durch die Differentialgleichungen zugehörige Werte der zweiten Differentialquotienten bestimmt. Unsere Wegweiser sind jetzt sozusagen bedingungsweise Wegweiser, welche vorschreiben: Wenn wir von einem Punkte in einer gewissen Richtung vorwärts gehen, so sollen wir uns mit einer gewissen Krümmung der Bahn weiter bewegen. Um die Gleichungen (5) zu integrieren, haben wir also jetzt diese Linienelemente zweiter Ordnung zu einer Kurve zusammenzusetzen bez. die Krümmung der Bahn so einzurichten, wie es durch unsere bedingungsweisen Wegweiser vorgeschrieben wird. Die Integralkurven, zu denen wir so gelangen, müssen jedenfalls unter den Integralkurven von (2) enthalten sein. Letztere Gleichungen können aber möglicherweise noch andere Integrale zulassen. Denn wir können aus der Thatsache allein, dafs die Fortschreitungsrichtungen einer Kurve den Gleichungen (2) genügen, nicht schliefsen, dafs ihre Krümmungen mit den Gleichungen (5) in Übereinstimmung sind. Bei den singulären Lösungen ist, wie wir sahen, dieses in der That nicht der Fall.

Wir können aber weiter behaupten, dafs die allgemeinen Lösungen von (2) sämtlich auch den Gleichungen (5) genügen müssen. Denn diese Lösungen bilden eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Bahnkurven, und da einige von ihnen sicherlich Integralkurven von (5) sein müssen, so werden es alle sein. *Es haben also die allgemeinen Lösungen von* (2) *die durch* (5) *vorgeschriebene Krümmung, nicht aber die singulären.*

Wir sehen an diesem Beispiel, wie nötig es ist, stets auf den eigentlichen Sinn der Formeln (hier also auf die Betrachtung der Linienelemente) zurückzugehen und niemals blindlings auf die formale Richtigkeit der Rechenoperationen zu vertrauen. —

Wir gehen nun zu einer neuen Bewegungsart des Kreisels über, zu den schon pag. 273 erwähnten *„der regulären Präcession benachbarten Bewegungen“*. Wir erteilen dem Kreisel zu dem Ende, während er in einer regulären Präcessionsbewegung begriffen ist, einen kleinen Anstofs. Die Richtung des Anstofses soll beliebig, die Gröfse desselben aber beliebig klein gewählt werden dürfen. Unser Anstofs setzt sich mit dem zur regulären Präcession gehörigen Impulse nach der Parallelogrammregel zusammen. Die Komponenten des ursprünglichen Impulses werden also in einem gewissen Zeitpunkte, den wir als „Anfangszeit“ bezeichnen können, um beliebig kleine Zuwächse, die Komponenten unseres Anstofses, vermehrt. Die Frage ist, welche Bewegung dem so veränderten Anfangsimpulse entspricht.

Am bequemsten zerlegen wir den Impuls in seine Komponenten nach den drei durch unser Problem ausgezeichneten Axen, der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie, d. i. in die senkrechten Projektionen $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[\Theta]$ des Impulsvektors auf jene Axen. Von diesen sind die beiden ersten während jeder natürlichen Bewegung des schweren Kreisels unveränderlich und mit den Integrationskonstanten N und n identisch. Die letzteren Buchstaben mögen speziell die für die reguläre Präcession charakteristischen Werte der Komponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bezeichnen; die Zuwächse, welche sie durch unsern Anstofs erfahren, mögen N' und n' heifsen. Die dritte Impulskomponente $[\Theta]$ ist im allgemeinen während der Bewegung variabel. Nur bei der regulären Präcession haben wir speziell $[\Theta] = 0$, weil nach (5) $[\Theta] = A\vartheta'$ und $\vartheta' = 0$ ist. Der Zuwachs, welcher durch den Anstofs hinzugefügt wird, bedeutet daher den Gesamtwert der $[\Theta]$-Komponente zu Beginn der Bewegung. Wir bezeichnen ihn mit $[\Theta_0]$, um anzudeuten, dafs dieser Wert die $[\Theta]$-Komponente nur zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Im Übrigen werden wir den Effekt der Impulszuwächse n', N' und $[\Theta_0]$ einzeln untersuchen. In diesem Sinne fragen wir zunächst nach der Verschiebung der beiden Parallelkreise e und e' bei ausschliefslicher Vermehrung der Impulskomponente $[\Psi]$ um n'.

Zunächst ist klar, dafs einer der Parallelkreise e, e' mit dem Präcessionskreise e zusammenfällt. Da nämlich $[\Theta_0] = 0$ sein sollte, so wird zu Beginn der Bewegung, wo $u = e$ ist, $\vartheta' = 0$, also auch $u' = 0$. Eine Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist also nach wie vor gleich e. Die zweite Wurzel e', welche im Falle $n' = 0$ mit e zusammenfällt,

wird durch unsern Anstofs einen Zuwachs erfahren. Wir bezeichnen diesen mit 2ε, setzen also, wie pag. 270, $e' - e = 2\varepsilon$. Dabei ist ε eine mit n' verschwindende Zahl, wie unmittelbar aus der Stetigkeit unserer C_3 von pag. 250 folgt. Nehmen wir n' hinreichend klein, so können wir auch ε beliebig klein machen.

Die Gröfse von e' bez. die von 2ε berechnet sich darauf aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240 oder, wie wir ausführlicher schreiben wollen,

$$U_1(u, v) = 0.$$

Diese Gleichung mufs erfüllt sein einerseits im Falle der regulären Präcession, d. h. für $u = e$, $v = n$, andrerseits im Falle unserer zur regulären Präcession benachbarten Bewegung, also für $u = e + 2\varepsilon$, $v = n + n'$. Entwickeln wir daher $U_1(e + 2\varepsilon,\ n + n')$ nach dem Taylorschen Lehrsatze in der Nähe des Wertepaares (e, n), so ergiebt sich wegen $U_1(e, n) = 0$:

$$U_1(e + 2\varepsilon,\ u + n') = 2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} + \cdots;$$

hier verschwindet die linke Seite; auf der rechten vernachlässigen wir wegen der Kleinheit von ε und n' alle nicht hingeschriebenen höheren Potenzen. Alsdann ergiebt sich:

$$2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} = 0$$

oder

$$2\varepsilon = -n' \frac{\partial U_1}{\partial v} \Big/ \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

wobei wir rechts $v = n$, $u = e$ einzutragen haben. Ohne die rechte Seite genauer auszurechnen, begnügen wir uns gezeigt zu haben, dafs ε auf diese Weise als eine mit n' verschwindende Gröfse in jedem Falle bestimmt werden kann.

Nicht anders liegt die Sache, wenn wir N um N' vermehren, dafür aber die ursprünglichen Werte $[\Psi] = n$, $[\Theta_0] = 0$ festhalten. Der eine Parallelkreis ist wiederum e; die Verschiebung 2ε des anderen Parallelkreises berechnet sich wie vorher; da nämlich die Gleichung $U_1 = 0$ in n und N symmetrisch gebaut ist, haben wir in der Endformel für ε nur n und N zu vertauschen und N' statt n' zu schreiben.

Im dritten Falle, wo wir den Anstofs $[\Theta_0]$ hinzufügen und $n' = N' = 0$ nehmen, verschieben sich beide Parallelkreise e und e'. Es ist nämlich jetzt zu Beginn der Bewegung nicht mehr $\vartheta_0' = 0$, sondern $A\vartheta_0' = [\Theta_0]$, mithin ist auch der Anfangswert von u, den wir mit u_0 bezeichnen, nicht mehr Wurzel von $U = 0$. Bei der Bestimmung von e und e' haben wir daher von dieser kubischen Gleichung und nicht von der

quadratischen $U_1 = 0$ auszugehen. Es soll gezeigt werden, dafs die beiden Parallelkreise e und e' von dem ursprünglichen Präcessionskreise u_0 in erster Annäherung beide gleichweit abstehen, so dafs u_0 wie im vorigen Paragraphen den mittleren Parallelkreis bedeutet:

$$u_0 = \frac{e + e'}{2}.$$

Die ursprüngliche Form des Ausdruckes U war pag. 238 in Gleichung (7′) angegeben:

$$A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1 - u^2). \tag{6}$$

Zu Beginn der Bewegung ($u = u_0 = \cos \vartheta_0$) ist die linke Seite dieser Gleichung bekannt. Da nämlich allgemein

$$U = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \sin^2 \vartheta \cdot \vartheta'^2,$$

so wird für $u = u_0$

$$A^2 U = \sin^2 \vartheta_0 (A\vartheta_0')^2 = (1 - u_0^2)[\Theta_0]^2.$$

Sómit folgt die Gleichung

$$(1 - u_0^2)[\Theta_0]^2 = -(Nu_0 - n)^2 + (k - N^2 - 2APu_0)(1 - u_0^2). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) wollen wir k eliminieren, nachdem wir in (6) $U = 0$ gesetzt haben. Wir finden so für die gesuchten Werte $u = e$ und $u = e'$ die Gleichung:

$$(1 - u^2)[\Theta_0]^2 = (Nu - n)^2 - (Nu_0 - n)^2 \frac{1 - u^2}{1 - u_0^2} + 2AP(u - u_0)(1 - u^2). \tag{8}$$

Das Polynom dritten Grades, welches auf der rechten Seite steht, kann leicht in Linearfaktoren aufgelöst werden. Setzen wir nämlich die rechte Seite gleich Null, so müssen wir die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ im Falle der regulären Präcession wiederfinden, weil $[\Theta_0] = 0$ diese Bewegung ergiebt. Die Linearfaktoren der rechten Seite lauten daher $u - u_0$, $u - u_0$ und $u - e''$. Der hinzutretende von u unabhängige Faktor wird gleich dem Koeffizienten von u^3 in Gleichung (8) und die rechte Seite dieser Gleichung gleich

$$-2AP(u - u_0)^2(u - e'').$$

Mithin können wir statt (8) einfacher schreiben:

$$(1 - u^2)[\Theta_0]^2 = 2AP(u - u_0)^2(e'' - u).$$

Nun dürfen wir $[\Theta_0]$ beliebig klein voraussetzen, so dafs auch die rechte Seite aufserordentlich klein wird. Die gesuchten Wurzeln e und e' liegen daher aufserordentlich nahe an u_0. Wir setzen $u = u_0 + \varepsilon$ und erhalten zur Bestimmung von ε die Gleichung

$$\varepsilon^2 = \frac{(1 - (u_0 + \varepsilon)^2)[\Theta_0]^2}{2AP(e'' - u_0 - \varepsilon)}. \tag{9}$$

Die rechte Seite könnten wir nach Potenzen von ε in eine konvergente Reihe entwickeln. Da wir aber ε ebenso wie $[\Theta_0]$ als beliebig klein voraussetzen können, brauchen wir nur das erste Glied. Aus diesem ergeben sich zwei entgegengesetzt gleiche Werte für ε, nämlich

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1 - u_0^2}{2AP(e'' - u_0)}}\,[\Theta_0].$$

Hiernach werden die gesuchten Werte

$$e = u_0 - \varepsilon \quad \text{und} \quad e' = u_0 + \varepsilon,$$

wo ε mit $[\Theta_0]$ verschwindet.

Die Parallelkreise e und e' stehen also in erster Annäherung gleichweit ab von dem Ausgangskreise u_0, dieser stellt, wie behauptet wurde, den „mittleren Parallelkreis der Bewegung“ im Sinne des vorigen Paragraphen dar.

Wir kommen nach diesen Vorbereitungen auf unsere pag. 283 getroffene Unterscheidung der drei Fälle zurück, welche bez. durch die drei Werte des Zusatzimpulses n', N', $[\Theta_0]$ charakterisiert waren. Allen drei Fällen ist, wie wir sahen, gemeinsam, dafs die Parallelkreise e und e' einander um so näher liegen, je kleiner der Anstofs gewählt war. *Die fraglichen Bahnkurven sind also ihrem Verlaufe nach dem ursprünglichen Präcessionskreise beliebig benachbart,* wie schon in ihrer Benennung ausgedrückt wurde.

Sodann erinnern wir uns der Ergebnisse des vorigen Paragraphen. Die dortigen Näherungsformeln (8′) und (14′), welche im allgemeinen nur eine begrenzte Annäherung lieferten, geben gerade in dem jetzt vorliegenden Spezialfalle eine beliebig gute Annäherung; der Fehler wird sowohl in der Formel für u wie in der für ψ bei hinreichend kleinem ε beliebig klein. Wir werden daher jene Formeln ohne Bedenken*) auf die vorliegenden drei Fälle anwenden und schreiben dürfen:

$$(10) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \dfrac{\pi t}{\omega}, \\ \psi = \nu t + \nu_1 \varepsilon \cos \dfrac{\pi t}{\omega}; \end{cases}$$

die hierbei benutzten Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

$$(11) \qquad \omega = \pi \sqrt{\frac{A}{2P(e'' - u_0)}}, \quad \nu = \frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)},$$

$$\nu_1 = \frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{\pi A(1 - u_0^2)^2}\,\omega,$$

*) Man beachte jedoch die Bedingung von pag. 277, wonach u_0 nicht, und auch nicht nahezu, gleich ± 1 sein darf. Über diese Präcessionsfälle folgen im § 5 einige Bemerkungen.

wobei n und N die Gesamtwerte der Impulskomponenten $[\Psi]$ und $[\Phi]$, d. h. die eventuell um n' und N' vermehrten Werte dieser Komponenten bei der ursprünglichen regulären Präcession bezeichnen.

Um eine klare Vorstellung von unsern benachbarten Bahnkurven zu bekommen, betrachten wir die *Teilbewegungen der regulären Präcession und der Nutation*, in welche die Bewegung der Kreiselspitze durch (10) zerlegt erscheint, für sich.

Die Bahnkurve der ersten Teilbewegung ist der Präcessionskreis $u = u_0$. *Dieser fällt mit dem ursprünglichen Präcessionskreise nur in dem Falle zusammen, wo der Anstofs die Knotenlinie zur Axe hat* ($n' = N' = 0$, $[\Theta_0] \neq 0$). In den beiden anderen Fällen dagegen ist er im Vergleich zu dem ursprünglichen Präcessionskreise um das Stückchen ε im vertikalen Sinne verschoben. Genauer könnten wir so sagen: Bei dem Anstofse $[\Theta_0]$ verschwindet die Abweichung zwischen dem mittleren Parallelkreise u_0 und dem Kreise der ursprünglichen Präcession bei verschwindender Gröfse des Anstofses von höherer als der ersten Ordnung, bei den Anstöfsen n' und N' dagegen nur von der ersten Ordnung.

Die Präcessionsgeschwindigkeit unserer ersten Teilbewegung ist in allen Fällen durch die Gröfse ν aus Gleichung (11) gegeben. *Diese Gröfse stimmt mit der ursprünglichen Präcessionsgeschwindigkeit wieder nur im Falle des Anstofses* $[\Theta_0]$ *überein*, weil alsdann die Impulskomponenten n und N ungeändert bleiben und der Wert von u_0 mit dem ursprünglichen Werte von u bei der regulären Präcession in dem eben präcisierten Sinne zusammenfällt. In den beiden anderen Fällen weicht der Wert der Präcessionsgeschwindigkeit von dem ursprünglichen Werte um Gröfsen ab, welche von derselben Gröfsenordnung wie n' und N' sind.

Die zweite Teilbewegung, die Nutation, ist nach Früherem eine harmonische Schwingung mit ungleichen Amplituden in den Koordinaten u und ψ oder, wie wir kürzer sagen, eine elliptische Schwingung relativ zum Kreise der Präcession. Die durch (11) bestimmte Gröfse ω giebt die halbe Schwingungsdauer, d. h. diejenige Zeit an, während der die Kreiselspitze von e zu e' gelangt. Die vertikale Schwingungsamplitude wird durch ε, die horizontale durch $\nu_1 \varepsilon$ gemessen. Man sieht ohne weiteres, *dafs bei verschwindendem Anstofs die Schwingungsperiode im allgemeinen endlich bleibt, während die beiden Schwingungsamplituden ihrerseits verschwinden.* Drücken wir nämlich ω durch unsere gewöhnlichen Integrationskonstanten n, N u. s. w. aus, indem wir für e'' den Wert aus Gleichung (9) von pag. 273 eintragen, so folgt in der Grenze für verschwindende Gröfse des Anstofses:

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{A^2(1-e^2)}{n^2+N^2-2nNe-4APe(1-e^2)}};$$

hier bedeuten n, N und e die Konstanten der ursprünglichen regulären Präcession. Der so gefundene Grenzwert von ω ist offenbar von Null verschieden. Dasselbe gilt von dem Grenzwerte des Winkels ψ_ω, um welchen das Azimuth der Kreiselspitze während einer Nutation zunimmt. Nach Gleichung (11) wird nämlich einfach

$$\psi_\omega = \nu\omega.$$

Wir können hiernach mit leichter Mühe die Figurenserie des vorigen Kapitels durch eine Figur vervollständigen, indem wir neben Fig. 31 („langsame Präcession") eine Nachbarfigur einschalten. In 31 war vorausgesetzt $A = -P = 1$, $e = 0$, $N = 0, 2$, $n = -5$. Geben wir beispielsweise n einen von -5 etwas verschiedenen Wert, so überlagert sich der regulären Präcession eine Schwingung von der halben Periode

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{1}{n^2+N^2}} = \frac{\pi}{5} \text{ circa};$$

gleichzeitig wird der Azimuthalausschlag während der Zeit ω

$$\psi_\omega = n\omega = -\pi \text{ circa}.$$

Die neben Fig. 31 einzuschaltende Nachbarfigur würde daher folgendermafsen schematisch zu zeichnen sein (vgl. Fig. 47). Man beachte die eigentümliche Thatsache, dafs unsere Nutation, welche, wie wir wissen, für sich genommen, verschwindende Dimensionen hat, durch Überlagerung mit der endlichen Präcessionsgeschwindigkeit zu einer nahezu vollständigen Umkreisung der Vertikalen auseinander gezogen wird.

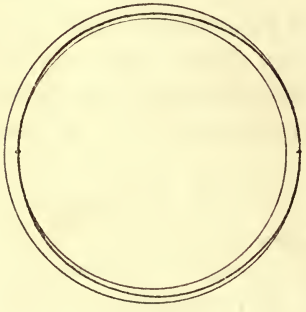


Fig. 47.

Ganz dieselbe Figur kann uns auch als Darstellung der zu der unendlich schnellen Präcession (Fig. 35) benachbarten Bahnkurven dienen. Nur wird hier (wegen des besonderen Wertes $n = \infty$) ω gleich 0 und ψ_ω genau gleich $\pm\pi$. —

Die wesentliche Absicht, welche wir bei der Heranziehung der zur regulären Präcession benachbarten Lösungen verfolgen, besteht jedoch nicht sowohl in der Erkenntnis dieser Bewegungen selbst, als vielmehr darin, dafs wir von hieraus auf die *Stabilität der regulären Präcession* Schlüsse machen können. Wir behaupten nämlich auf Grund unserer Untersuchung der benachbarten Bewegungen: *Die reguläre Präcession ist sicher eine stabile Bewegung des Kreisels.*

Was wir unter dem Worte Stabilität verstehen wollen, haben wir bereits pag. 219, wenn auch noch nicht mit hinlänglicher Schärfe, erklärt. Eine eingehendere Definition sparen wir bis zu dem sechsten Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels auf; für den vorliegenden Fall genügt unsere frühere Erklärung. Wir wiederholen daher: Eine Bewegung soll stabil heifsen, wenn sich bei Hinzufügung eines hinreichend kleinen Anstofses von beliebiger Richtung der Charakter der Bewegung *stetig* ändert.

Wollen wir dieses Kriterium auf unseren Fall anwenden, so müssen wir die vorhergehenden Betrachtungen noch erst nach zwei Richtungen vervollständigen.

Unter der „Bewegung" werden wir nämlich nicht nur die Bewegung der Kreiselspitze längs ihrer Bahnkurve, sondern die Gesamtheit der Lagen des Kreisels, d. h. den Inbegriff der Werte verstehen müssen, welchen etwa die Koordinaten φ, ψ, ϑ während des Ablaufs der Zeit annehmen. Nun wissen wir aber, dafs die Werte der φ-Koordinate aus denen der ψ-Koordinate durch Vertauschung von n und N mit $-N$ und $-n$ erhalten werden können (vgl. das Reciprocitätsgesetz des Kugelkreisels in § 5 des vorigen Kapitels). Wir haben daher, um die „Bewegung" vollständig zu beherrschen, nicht nötig, für die φ-Koordinate neue Entwicklungen zu machen, sondern können uns darauf berufen, dafs diese sich qualitativ ebenso verhält wie die ψ-Koordinate.

Ferner spricht unsere Stabilitätsdefinition von einem beliebigen Anstofse, d. h. von einer gleichzeitigen Vermehrung der Impulskomponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ um kleine Zuwächse. Es ist aber klar, dafs der Effekt eines beliebigen Anstofses sich durch direkte Superposition aus den Wirkungen der oben betrachteten speziellen Anstöfse n', N', $[\Theta_0]$ zusammensetzen lassen mufs, falls nur jene Zuwächse hinreichend klein sind. Die hierbei entstehenden Formeln für u, ψ und φ sind daher vom gleichen Charakter, wie die obigen für u und ψ.

Nun zeigt der Anblick der Gleichungen (10), dafs diese Formeln stetig in die Gleichungen der regulären Präcession übergehen, wenn wir die Gröfse der Impulszuwächse stetig verkleinern. Dasselbe gilt daher für eine ganz beliebige Störung hinsichtlich des Gesamtcharakters der Bewegung. Auch dieser wird stetig in die reguläre Präcession übergehen, wenn wir die Störung stetig zu Null abnehmen lassen.

Hiernach ist die Stabilität der regulären Präcession sichergestellt.

Unsere hier benutzte Definition der Stabilität ist von der gewöhnlich gegebenen Definition (vgl. hierzu § 6 dieses Kapitels) verschieden. Während wir nur verlangen, dafs die Abänderung der Bewegung eine stetige sei,

d. h. um so kleiner ausfalle, je kleiner der Anstofs genommen wird, bezeichnet man sonst vielfach eine Bewegung nur dann als stabil, wenn die Abweichung der gestörten Bewegung von der ursprünglichen *dauernd* sehr klein (oder beliebig klein) bleibt. Wir möchten uns im allgemeinen diesem Sprachgebrauch nicht anschliefsen, weil er, wie später gezeigt werden wird, eine ungebührliche Beschränkung des Stabilitätsbegriffes mit sich bringt. Wir bemerken aber, dafs speziell die reguläre Präcession auch nach diesem engeren Stabilitätsbegriffe als stabil zu bezeichnen ist, sofern wir nämlich unser Augenmerk lediglich auf die geometrische Gestalt der Kreiselspitzenbahn richten und von ihrer zeitlichen Durchlaufung absehen. In der That ist die durch einen Zusatzstofs abgeänderte Bahnkurve ganz in einer Kugelzone von der (in vertikaler Richtung gemessenen) Breite 2ε eingeschlossen und kann durch Verkleinerung von ε und mittelbar durch Verkleinerung der Störung dem Präcessionskreise e ihrer ganzen Erstreckung nach beliebig nahe gebracht werden. Dafs etwas Analoges nicht bei jeder Bewegung der Fall ist, zeigt unter anderem das Beispiel der kräftefreien Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Bei Hinzufügung eines Anstofses verwandelt sich die ursprüngliche geradlinige Bahn in eine andere gerade Linie, welche sich von der ersteren im Laufe der Zeit beliebig weit entfernt, wie klein auch der Anstofs gewählt sein möge. Wir werden also insofern der Bahnkurve der regulären Präcession einen *besonders hohen Grad von Stabilität* zusprechen müssen.

Die Sache liegt schon anders, wenn wir aufser der Gestalt der Bahnkurve auch ihre zeitliche Durchlaufung oder den Gesamtcharakter der Bewegung mit Einschlufs der φ-Koordinaten in Betracht ziehen.

Wir können nämlich nicht behaupten, dafs die Entfernung der Kreiselspitze bei der durch einen kleinen Anstofs abgeänderten Bewegung von ihrer Lage in entsprechenden Zeiten bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen dauernd klein bleibt. In der That sahen wir, dafs durch Hinzufügung des Anstofses n' oder N' der mittlere Wert der Winkelgeschwindigkeit ψ' abgeändert wird, so dafs die Kreiselspitze nach der Störung ihre Bahn mit einer anderen Geschwindigkeit durchläuft wie vor derselben. Im Laufe der Zeit wird daher die Lage der Kreiselspitze bei den verglichenen Bewegungen um beliebige endliche Stücke differieren. Entsprechendes gilt nach unserem Reciprocitätsgesetz von der Koordinate φ, sofern durch den Anstofs die Werte von n und N abgeändert werden.

Lediglich in dem speziellen Falle, wo der Anstofs keine Veränderung von $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bewirkt und nur aus der einen Komponente

$[\Theta_0]$ besteht, bleibt, wie wir sahen, der ursprüngliche Betrag der Präcessionsgeschwindigkeit ψ' und daher auch der ursprüngliche Wert von φ' erhalten. Die abgeänderte Bahnkurve oscilliert dann mit gleichem Ausschlag nach oben und unten um den ursprünglichen Präcessionskreis herum. Also würde nur bei Beschränkung auf so spezielle Anstöfse die Abweichung in der Lage der Kreiselspitze und den Kreisellagen überhaupt bei den verglichenen Bewegungen dauernd klein bleiben, und die reguläre Präcession im gewöhnlichen Sinne nur unter dieser Einschränkung stabil zu nennen sein. Die letzten Bemerkungen fassen wir noch einmal, wie folgt, zusammen:

Im Sinne der gewöhnlichen Stabilitätsdefinition müfste man konsequenter Weise die reguläre Präcession als instabil bezeichnen. Stabil könnte man sie nur nennen, wenn man eine von zwei Einschränkungen hinzufügt. Entweder: Man beachte nur die geometrische Gestalt der Bahnkurve, nicht die Bewegung auf der Bahnkurve bez. die Bewegung des Kreisels überhaupt; oder: Man richte die Störung so ein, dafs sie lediglich eine Veränderung von ϑ' bewirkt, dagegen φ' und ψ' ungeändert läfst. Vom Standpunkte unseres Stabilitätsbegriffes hingegen haben wir die reguläre Präcession ohne Einschränkung für stabil zu erklären. Dabei können wir konstatieren, dafs der geometrischen Gestalt der Bahnkurve, und bei den zuletzt genannten speziellen Störungen der Bewegung überhaupt, ein besonders hoher Grad von Stabilität zukommt.

§ 2. Die pseudoreguläre Präcession, Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung.

Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Punkte der gesamten Kreiseltheorie, zur Erklärung derjenigen Bewegung, welche wegen ihrer paradoxen Eigenschaften und wegen der Häufigkeit ihres thatsächlichen Vorkommens vor allen anderen das Interesse der erklärenden und beobachtenden Naturforscher auf sich gezogen hat. Wir meinen diejenige Bewegung des Kreisels, welche wir als *pseudoreguläre Präcession* bezeichnet haben.

Die Eigenart dieser Bewegung wollen wir zunächst durch Vergleich mit der *regulären Präcession* schildern.

Wie wir gesehen haben, tritt die reguläre Präcession nur unter besonderen Umständen auf, welche im vorigen Paragraphen sowie im sechsten Paragraphen des dritten Kapitels ausführlich angegeben sind. Wenn man sich aber auf den Standpunkt des Experimentes stellt, könnte man leicht zu der Auffassung kommen, dafs die reguläre Präcession die allgemeine Bewegung des schweren Kreisels wäre und dafs sie bei willkürlicher Wahl der Anfangsbedingungen zustande käme. In der That,

wenn wir den Kreisel, wie es gewöhnlich geschieht, mit einer Schnur aufziehen und ihn dann, ohne Hinzufügung eines sonstigen erheblichen Anstofses, dem Einflufs der Schwere überlassen, so scheint die Figurenaxe einen Kreiskegel um die Vertikale mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit zu beschreiben. Dies Ergebnis müfste natürlich im höchsten Grade paradox erscheinen. Denn es ist nicht zu begreifen, wie die nach unten wirkende Schwere im allgemeinen eine Bewegung hervorrufen sollte, bei der z. B. sämtliche Punkte der Figurenaxe dauernd in horizontaler Richtung, also genau senkrecht gegen die Richtung der äufseren Kraft, fortschreiten.

Hiergegen ist nun zu bemerken: *Erstens* ist das genannte Beobachtungsergebnis nicht exakt. Die Bewegung hat nur eine äufserliche Ähnlichkeit mit der regulären Präcession. Wenn wir genauer hinsehen, bemerken wir, dafs die Figurenaxe kleine periodische Schwingungen um den Kreiskegel der regulären Präcession ausführt, welche allerdings bei sehr grofser Rotationsgeschwindigkeit kaum merklich sind und sich am ehesten noch in einem periodischen Erzittern der Unterlage kundgeben. Aus diesem Grunde haben wir die in Rede stehende Bewegung mit dem Namen der *pseudoregulären Präcession* belegt.

Die Täuschung wird noch dadurch verstärkt, dafs die Abweichungen von der regulären Präcession durch allerlei Nebenumstände, welche in der abstrakten Mechanik gewöhnlich nicht berücksichtigt werden, wie Reibung, Elasticität der Unterlage, schnell absorbiert werden. Diese Nebenumstände sollen indessen vorläufig aufser Betracht bleiben.

Zweitens sind die Verhältnisse, wie sie im Experimente gewöhnlich vorliegen, nicht die allgemeinen, sondern in gewisser Weise spezialisiert. Denn wir schaffen durch das Aufziehen allemal einen Impulsvektor, welcher genau oder nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt und welcher überdies stets eine sehr beträchtliche Länge hat.

Wir werden so, zunächst vom experimentellen Standpunkte aus, dazu geführt, die Bedingungen für die Möglichkeit der pseudoregulären Präcession folgendermafsen zu formulieren:

Die Bewegung wird dann eine pseudoreguläre Präcession sein, wenn der Impulsvektor anfangs nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt und eine beträchtliche Länge hat.

Die Worte „nahezu“ und „beträchtlich“ müssen dabei natürlich genauer präcisiert werden. Wir wollen etwa sagen, zwei Richtungen fallen „nahezu“ zusammen, wenn wir ihre Durchstofsungspunkte auf der Einheitskugel mit bloſsem Auge nicht mehr unterscheiden können.

Um sodann mit dem Worte „beträchtlich“ eine genaue Vorstellung zu verbinden, müssen wir die Länge des Impulsvektors mit der Gröfse

der Schwerkraft vergleichen. Eine direkte Vergleichung der beiden Gröfsen ist deshalb mifslich, weil sie verschiedene Dimensionen haben, ihr Quotient also keine absolute Zahl ist. In der That hat $|i|$ die Dimension $\left[\frac{ml^2}{t}\right]$, P dagegen die Dimension $\left[\frac{ml^2}{t^2}\right]$ (vgl. pag. 88 u. 84). Dagegen sind $|i|^2$ und etwa AP zwei gleichbenannte Gröfsen, indem beiden die Dimension $\left[\frac{m^2l^4}{t^2}\right]$ zukommt. Infolgedessen können wir diese beiden Gröfsen direkt numerisch vergleichen. Wir wollen nun etwa festsetzen: Die Länge des Impulses soll als beträchtlich gelten, wenn ihr Quadrat mindestens das 100-fache des (in gleichen Einheiten gemessenen) Produktes AP beträgt. Da der Hauptbestandteil von $|i|$ nach der vorhergehenden Festsetzung von dem Eigenimpulse N gebildet wird und da sicher $|i| \geq N$ ist, so können wir unsere Erklärung des Wortes „beträchtlich“ auch so fassen: Die Länge des Impulsvektors soll als beträchtlich gelten, wenn

$$N^2 > 100\,AP.$$

Die obige Bedingung für das Eintreten der pseudoregulären Präcession unterscheidet sich offenbar wesentlich von der im vorigen Paragraphen für die reguläre Präcession angegebenen. Während diese eine quantitative Bedingung war und ein ganz bestimmtes numerisches Verhältnis der Integrationskonstanten verlangte, ist unsere jetzige Bedingung qualitativer Natur; sie legt den Konstanten nur gewisse Ungleichungen auf. Dementsprechend ist die pseudoreguläre Präcession auch nur ein qualitativer Begriff; je nachdem wir den Ton auf die ersten oder letzten Silben des Wortes legen, postulieren wir eine geringere oder gröfsere Ähnlichkeit mit der regulären Präcession.

Übrigens bemerken wir, dafs im vorigen Kapitel, wo wir von der pseudoregulären Präcession sprachen (vgl. Fig. 28), die soeben angegebenen Bedingungen erfüllt waren. Dort war nämlich die Anfangslage des Impulses wie die der Figurenaxe horizontal ($n = 0$, $e = 0$), aufserdem war die Länge des Impulses als unendlich vorausgesetzt ($N = \infty$).

Wegen der Wichtigkeit unserer Bewegung wird es gut sein, die Behandlung möglichst elementar zu gestalten, wie solches auch von anderer Seite vielfach versucht worden ist, worauf wir im nächsten Paragraphen zurückkommen. Wir wollen also für das Folgende von unserer Kenntnis der allgemeinen Bewegungsformen zunächst absehen und unsere Resultate erst nachträglich mit der Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Integrale in Beziehung setzen.

Eine rein elementare Behandlung ist in unserem Falle natürlich nur auf Grund von mehr oder minder plausibeln Vernachlässigungen möglich,

welche sich streng nur aus der strengen Theorie und auf analytischem Wege rechtfertigen lassen. Trotzdem ist eine solche Behandlung lehrreich, da sie uns zwingt, auf die einfachsten Erklärungsgründe zurückzugehen, welche in den fertigen Formeln nur versteckt enthalten sind.

Nehmen wir für den Augenblick an, dafs die Schwere überhaupt nicht wirksam wäre. Dann rotiert unser Kreisel, den wir als Kugelkreisel voraussetzen, wie wir wissen, um die im Raume feste Impulsaxe mit konstanter Geschwindigkeit herum. Die Figurenaxe beschreibt einen Kreiskegel, welcher sehr eng sein wird, da nach Voraussetzung bei unserer Bewegung der anfängliche Richtungsunterschied zwischen Figuren- und Impulsaxe sehr gering ist. Die Kreiselspitze durchläuft auf der Einheitskugel fortgesetzt einen kleinen Kreis. *Wir setzen überdies voraus, dafs die Impulsaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfalle;* alsdann wird die durch die Figurenaxe gelegte Meridianebene von der durch die Impulsaxe gehenden Meridianebene bei unserer Rotation dauernd nur wenig abweichen und in erster Annäherung als mit jener zusammenfallend behandelt werden können. Ferner wird sich der Winkel ϑ zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe bei unserer Drehung nur sehr wenig ändern und in erster Annäherung konstant gesetzt werden können.

Hierauf berücksichtigen wir die Wirkung der Schwere. Der Impuls bleibt unter ihrem Einflufs nicht konstant, sondern setzt sich mit dem Drehstofse der Schwere $P \sin \vartheta$ in jedem Momente zusammen. Es mufs unsere nächste Aufgabe sein, uns von der Bahn des Impuls-Endpunktes ein Bild zu verschaffen.

Die Bewegung des Kreisels besteht natürlich nach wie vor aus einer Drehung um die (jetzt nicht mehr feste) Axe des Impulses. Betrachten wir nur einen genügend kurzen Zeitraum, etwa den einer einmaligen Umdrehung der Figurenaxe um den Impulsvektor, so können wir bei unserer jetzigen Bewegung dieselben Vernachlässigungen eintreten lassen, welche soeben für die Drehung um die im Raume feste Impulsaxe vorgeschlagen wurden. Wir können nämlich sagen: *Die Änderung des Impulses steht auf der durch die Impulsaxe gelegten Meridianebene* (statt auf der durch die Figurenaxe gelegten) *senkrecht.* Und: *Die Änderungsgeschwindigkeit hat die konstante Gröfse* $P \sin \vartheta_0$, *wo* ϑ_0 *irgend einen mittleren Wert des Winkels* ϑ *bedeutet* (anstatt der variabeln Gröfse $P \sin \vartheta$). Durch diese Angaben ist aber die Bahn des Impuls-Endpunktes in einfachster Weise bestimmt. *Sie ist einfach ein Kreisbogen um die Vertikale und wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.* Der Durchstofsungspunkt des Impulsvektors mit der Einheitskugel, den wir durch J bezeichnen wollen, bewegt sich daher *auf einem*

Parallelkreise oder, wenn wir nur einen genügend kleinen Teil der Einheitskugel betrachten und diese an der betreffenden Stelle durch ihre Tangentialebene ersetzen, *auf einer geraden Linie.*

Wir können leicht die Fortschreitungsgeschwindigkeit v des Punktes J angeben. Diese verhält sich ersichtlich zu der Fortschreitungsgeschwindigkeit $P \sin \vartheta_0$ des Impuls-Endpunktes wie 1 zu $|i|$, unter $|i|$ die Länge des Impulsvektors verstanden. In dieser Proportion mögen wir $|i|$ einfach ersetzen durch die Projektion N des Impulsvektors auf die Figurenaxe, weil diese nach Voraussetzung den Hauptbestandteil des Impulses ausmacht. Wir finden so für die Geschwindigkeit v den Wert

$$v = \frac{P \sin \vartheta_0}{N}. \tag{1}$$

Die Bewegung der Figurenaxe und die Bahnkurve der Kreiselspitze sind jetzt leicht zu bestimmen. Die Kreiselspitze F, d. h. der Durchstofsungspunkt der Figurenaxe mit der Einheitskugel, mufs nämlich, da die instantane Bewegung aus einer Drehung um den Impulsvektor besteht, ständig senkrecht gegen die Verbindungslinie JF fortschreiten. Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit w, mit welcher sich F um J dreht, einfach gleich $\frac{|i|}{A}$. Ersetzen wir, wie oben, $|i|$ durch den Hauptbestandteil N des Impulses, so ergiebt sich für w der konstante Wert

$$w = \frac{N}{A}. \tag{2}$$

Durch die letzten Angaben ist aber die Bahnkurve der Kreiselspitze als Cykloide charakterisiert.

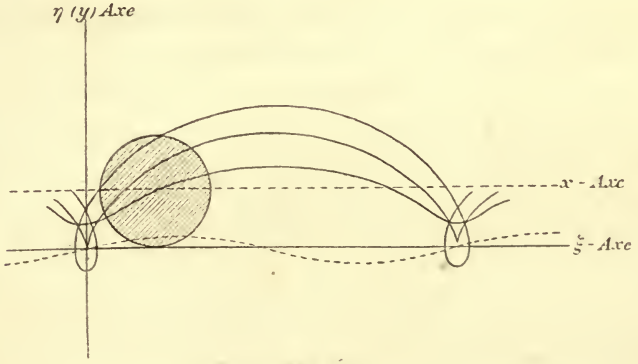


Fig. 48.

In der That, erzeugen wir uns eine Cykloide in gewöhnlicher Weise (vgl. Fig. 48) durch Abrollen eines Rades auf einer Geraden, so dreht sich jeder mit dem Rade festverbundene Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den jeweiligen Berührungspunkt des Rades

und schreitet beständig senkrecht gegen die Verbindungslinie mit diesem fort, während der Berührungspunkt selbst mit konstanter Geschwindigkeit an seiner Geraden hinwandert. Wir können daher direkt die Bahn der Kreiselspitze F mit der Bahnkurve eines Punktes an einem rollenden Rade, d. h. mit einer Cykloide, und die Bahn des Impulspunktes J mit der geradlinigen Bahn des Berührungspunktes identifizieren.

Hiernach läfst sich die Gleichung der Bahnkurve sofort hinschreiben. Wir benutzen rechtwinklige Koordinaten ξ, η, indem wir die Gerade, an der unser Rad abrollt, zur ξ-Axe nehmen. Sei r der Radius des Rades, a der Abstand des die Cykloide aufzeichnenden Punktes F vom Mittelpunkt des Rades und ω die Winkelgeschwindigkeit des Abrollens, wobei wir ω der Gleichung (2) entsprechend zu wählen haben. Wir nehmen noch an, dafs für $t = 0$ der Punkt F senkrecht über dem Berührungspunkte J des Rades und auf der η-Axe liegen möge, so dafs seine Entfernung von derselben $\eta_0 = r + a$ wird. Dann lauten die Gleichungen der Cykloide:

$$\begin{cases} \xi = r\omega t + a \sin \omega t, \\ \eta = \quad r + a \cos \omega t. \end{cases} \tag{3}$$

Die Gröfsen r und a sind hierin durch die Konstanten des Kreisels folgendermafsen zu bestimmen. Da $r\omega$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher der Berührungspunkt J auf der ξ-Axe fortschreitet, so müssen wir $r\omega = v$ haben und also mit Rücksicht auf (1) und (2):

$$r = \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}. \tag{4}$$

Die Gröfse a bestimmt sich dann aus der anfänglichen Entfernung η_0 der Punkte J und F durch die Gleichung

$$a = \eta_0 - r.$$

Nun mifst η_0 die Abweichung des Impulsvektors von der Figurenaxe in der Anfangslage. Bezeichnen wir das von dem Endpunkt des Impulsvektors auf die Figurenaxe gefällte Lot mit p und seine Projektion auf die Vertikale mit n', so haben wir (vgl. die Fig. 49)

$$\eta_0 = \frac{p}{N} = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0}. \tag{5}$$

Dabei ist noch, wie aus der Figur hervorgeht:

$$n' = n - N \cos \vartheta_0. \tag{5'}$$

Aus (4) und (5) folgt also als Wert von a

$$a = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}. \tag{6}$$

Setzen wir die gefundenen Werte von r und a in die Gleichungen (3) ein und drücken wir auch w nach (2) aus, so erhalten wir *die Gleichung der Bahnkurve in der definitiven Form*

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{P\sin\vartheta_0}{N}t + \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\sin\dfrac{N}{A}t, \\ \eta = \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2} + \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\cos\dfrac{N}{A}t. \end{cases}$$

Je nachdem der Abstand a gröfser, gleich oder kleiner als der Radius r des Kreises ist, haben wir eine *verschlungene*, eine *gemeine* oder eine *gestreckte Cykloide*, welche drei Typen in der Fig. 48 angegeben sind.

Wir haben noch einen Punkt besonders hervorzuheben. Bei der Bestimmung der Impulskurve nahmen wir an, dafs die Figurenaxe sich dauernd nur wenig von der Impulsaxe entfernt. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist unmittelbar nur für den Anfang der Bewegung einleuchtend; sie ergiebt sich für diesen aus den Anfangsbedingungen. Nun folgt aber aus dem periodischen Verhalten unserer Bahnkurven überhaupt, dafs die anfangs vorhandenen Bedingungen jedesmal nach Durchlaufung eines vollen Cykloidenbogens genau wieder vorliegen. Infolgedessen gelten unsere Überlegungen für alle folgenden Phasen der Bewegung ebenso wie für die erste.

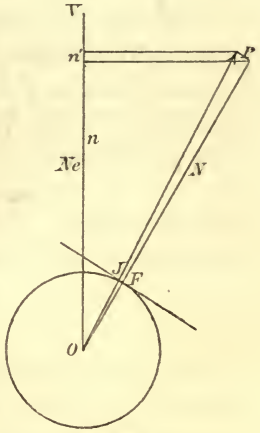


Fig. 49.

Natürlich erhalten wir durch das Vorstehende nur eine angenäherte Darstellung der Bewegung. Genau genommen müfsten wir nicht sagen: *Die Bahnkurve der Kreiselspitze unter den vorliegenden Anfangsbedingungen ist eine Cykloide*, sondern: *Dieselbe weicht von einer Cykloide um so weniger ab, je gröfser der Anfangsimpuls ist und je genauer er der Richtung nach mit der Figurenaxe zusammenfällt.*

Von welcher Art die Abweichung sein wird, ist leicht zu sehen. Da die Meridianebene durch die Impulsaxe nicht genau mit der Meridianebene durch die Figurenaxe zusammenfällt, wird auch die Impulskurve nicht genau ein Parallelkreis bez. eine Gerade sein; sie wird vielmehr, je nachdem sich bei der Rotation der Figurenaxe die eine Meridianebene von der anderen nach der einen oder anderen Seite hin entfernt, eine kleine Ausbiegung nach oben oder unten aufweisen, wie solches in der Fig. 48 durch die punktierte Linie angedeutet ist. Dementsprechend wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche zu dieser gewellten Impulskurve gehört, kleine periodisch wiederkehrende Verzerrungen gegenüber der Cykloidengestalt aufweisen. Dieselben sind jedoch in

der Figur und auch in unseren Formeln nicht enthalten; sie würden in letzteren den fortgelassenen Gliedern höherer Ordnung entsprechen.

Übrigens könnten wir unsere Cykloidenbewegung so erweitern, dafs sie auch diese Glieder zweiter und höherer Ordnung richtig wiedergiebt. Wir müfsten zu dem Zwecke auf dem rollenden Kreise abermals einen Kreis abrollen lassen, auf diesem eventuell einen nächsten u. s. f. Durch freie Wahl der Radien und der Umlaufsgeschwindigkeiten erhalten wir ein hinreichend allgemeines Schema, um beliebige Bewegungen mit beliebiger Genauigkeit wiederzugeben. Unsere obige näherungsweise Darstellung der Bahnkurve erscheint unter diesem Gesichtspunkte als erstes Glied einer unendlichen Reihe von Approximationen.*)

Die Fig. 48 müssen wir auffassen als eine aufserordentlich vergröfserte Wiedergabe der wirklichen Verhältnisse Im Experiment werden die einzelnen Cykloidenbögen so klein und folgen so schnell aufeinander, dafs das Auge sie nicht mehr wahrnimmt und den Eindruck einer gewöhnlichen Präcession erhält. Zum Belege dessen berechnen wir etwa die Durchlaufungsdauer und die Spannweite des einzelnen Cykloidenbogens. Die Zeit, während welcher der einzelne Teilbogen zurückgelegt wird, heifse 2ω; sie beträgt nach unsern Formeln

$$2\omega = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\frac{A}{N};$$

sie wird also mit wachsendem N zu Null. Die Spannweite des Cykloidenbogens, d. h. die Strecke, um welche die Figurenaxe während einer Periode in horizontaler Richtung fortschreitet, ist gleich

$$\frac{P\sin\vartheta_0}{N}\,2\omega = \frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0\cdot 2\pi;$$

diese Gröfse enthält den Faktor $\frac{AP}{N^2}$, welchen wir oben als klein $\left(<\frac{1}{100}\right)$ voraussetzten. Gleichzeitig mit der Spannweite wird auch die Höhe der Cykloidenbögen bei wachsendem N verschwindend klein entsprechend der Formel

$$a = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}.$$

Die sämtlichen Dimensionen der Cykloidenkurve werden also sozusagen mikroskopisch klein. Das Auge nimmt von dem ganzen Spiel der Kreisel-

*) Das im Texte angedeutete „*Prinzip der cykloidischen Annäherung*“ liefert auch die mathematische Grundlage, auf welcher die Auffassung der Himmelsmechanik im *Ptolemäischen Weltsysteme* beruht. Vgl. hierzu Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels, 1843, Kap. III, Theorie der epicykloidischen Bewegung. Ges. W. Bd. IV.

spitze nur ein unbestimmtes Mittel wahr, welches in einer scheinbar regulären Präcession besteht.

Ein numerisches Beispiel möge dieses veranschaulichen. Wir betrachten ein Schwungrad, dessen Masse einen Wulst von quadratischem Querschnitt bilden möge. Die Seite des Querschnittquadrates sei 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm. Der Unterstützungspunkt habe den Abstand von 2,5 cm vom Schwerpunkt des Rades. Zur Berechnung der Trägheitsmomente wollen wir uns gestatten, die Masse des einzelnen Querschnittes in dem Mittelpunkt desselben konzentriert zu denken. Dann findet man leicht für das absolute Maſssystem:

$$C = 1000\,\varrho\,\pi, \quad A = 750\,\varrho\,\pi, \quad P = 100\,\varrho\,\pi\,g,$$

unter ϱ die Dichtigkeit des Materiales verstanden.

Die Eigenrotation des Schwungrades betrage etwa (wie pag. 135) 20 Umdrehungen in der Sekunde. Dann ist seine Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe $40\,\pi$; mithin wird

$$N = 40\,000\,\varrho\,\pi^2 \quad \text{und} \quad \frac{N^2}{AP} = \frac{(40\,000\,\varrho\,\pi^2)^2}{75\,000\,(\varrho\,\pi)^2\,g} = \frac{64\,000\,\pi^2}{3g}.$$

Der Bruch $\frac{\pi^2}{g}$ kann näherungsweise gleich $\frac{1}{100}$ gesetzt werden; es wird also

$$\frac{N^2}{AP} = \frac{640}{3} > 200.$$

Der hier betrachtete Kreisel ist allerdings kein Kugelkreisel. Wir wissen aber, daſs ein Kreisel von ungleichen Trägheitsmomenten A und C dieselbe Bahnkurve der Kreiselspitze in demselben Tempo beschreibt, wie ein Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A und denselben Impulskonstanten n, N u. s. w. Infolgedessen dürfen die obigen Formeln auf unseren Fall übertragen werden.

Beträgt nun etwa die Anfangsneigung ϑ_0 der Figurenaxe gegen die Vertikale 30^0 und überlassen wir unseren Kreisel, ohne einen erheblichen seitlichen Anstoſs hinzuzufügen, dem Einfluſs der Schwere, so ergiebt sich nach dem Vorstehenden die Durchlaufungszeit des einzelnen Cykloidenbogens

$$2\,\omega = \frac{1500\,\varrho\,\pi^2}{40000\,\varrho\,\pi^2} < 0{,}04 \text{ sec.}$$

Die Höhe desselben wird gleichzeitig, wenn wir etwa n' direkt gleich Null nehmen:

$$|\,2\,a\,| = 2\,\frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0 = \frac{AP}{N^2} < 0{,}05 \text{ mm}.$$

Es ist klar, daſs sich diese kleinen Gröſsen der Beobachtung so gut wie vollständig entziehen.

Wie wir sehen, macht die Erklärung der pseudoregulären Präcession auf dem von uns eingeschlagenen Wege gar keine Schwierigkeit. Wenn man sonst diese Bewegung überraschend und paradox findet, so beruht das zum guten Teil darin, dafs man bei der Auffassung der mechanischen Vorgänge gewöhnlich von der Punktmechanik ausgeht und also in unserem Falle ausschliefslich an die nach unten gerichtete Wirkung der Schwere auf den frei beweglichen Massenpunkt denkt. Natürlich ist eine Erklärung der pseudoregulären Präcession auch vom Boden der Punktmechanik möglich, wie wir im folgenden Paragraphen noch ausführlicher entwickeln werden. Der Weg aber, welcher von da aus zum Verständnis unserer Kreiselbewegung führt, ist naturgemäfs ziemlich lang. Er wird wesentlich abgekürzt, wenn wir von vornherein mit den Begriffen des Trägheitsmomentes, der instantanen Drehung und namentlich mit dem Begriffe des Impulses operieren, wenn wir also, wie es hier geschah, von der Auffassung des starren Körpers als eines einheitlichen mechanischen Systems ausgehen. Natürlich sind jene Begriffe auch bei uns letzten Endes aus der Punktmechanik abgeleitet, aber diese Ableitung ist eben vorweg genommen und braucht darum nicht hinterher zwischengeschoben zu werden.

Teils um die vorhergehenden Betrachtungen zu kontrollieren, teils um sie in Zusammenhang zu bringen mit der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung, wollen wir nun unser Problem noch einmal analytisch anfassen. Wir sind dabei in der angenehmen Lage, mit den Näherungsformeln vom Schlufs des vorigen Kapitels auszukommen, deren begrenzte Genauigkeit in dem vorliegenden Grenzfalle in eine beliebige Genauigkeit übergeht. Zunächst haben wir uns ein Urteil über die Gröfse des Fehlers bei Anwendung jener Näherungsformeln zu bilden.

Unter der Annahme, dafs der Impulsvektor nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt, wird die Impulskomponente n (vgl. die Fig. 49) nahezu gleich Ne. Die Differenz $n - Ne$ bezeichnen wir, wie in Gleichung (5′) mit n', wobei $n' : N$ als eine kleine Zahl vorausgesetzt wird. Daneben werden wir unsere Annahme, dafs $AP : N^2$ eine kleine Zahl ist, zu benutzen haben.

Den Ausgangsparallelkreis e sehen wir wie früher als bekannt an; der zweite Parallelkreis e' läfst sich alsdann leicht näherungsweise aus der Gleichung $U_1 = 0$ bestimmen. Setzen wir nämlich in dieser Gleichung $n = Ne + n'$ und vernachlässigen wir das Quadrat von n' gegen das von N, so erhalten wir nach Gleichung (2) von pag. 240, indem wir zusammenziehen:

$$U_1 = N^2(1-e^2)(e-u) + 2n'N(1-e^2) - 2AP(1-e^2)(1-u^2).$$

Wir nehmen ebenso wie bei der obigen geometrischen Betrachtung an, dafs die Anfangslage der Figurenaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfällt ($e \neq \pm 1$), worauf wir mit $N^2(1-e^2)$ dividieren können, und erhalten zur Bestimmung von e' die Gleichung:

$$e - u + \frac{2n'}{N} - \frac{2AP}{N^2}(1-u^2) = 0. \tag{8}$$

Da die beiden letzten Terme dieser Gleichung nach Voraussetzung kleine Zahlen sind, sehen wir bereits, dafs die eine Wurzel (e') nahezu gleich e, die zweite (e'') sehr grofs werden mufs. Einen genaueren Wert von e' erhalten wir, wenn wir in dem an sich kleinen letzten Gliede u durch e oder lieber noch durch $u_0 = \frac{e+e'}{2}$ ersetzen; so ergiebt sich

$$e' = e + 2\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1-u_0^2). \tag{9}$$

Wir haben pag. 273 zwei Fälle unterschieden, in denen die dort behandelten Näherungsformeln zur Berechnung von u einen beliebig kleinen Fehler ergeben. Der erste Fall war der, dafs e und e' hinreichend wenig verschieden, der zweite der, dafs e'' hinreichend grofs wird. Der erste dieser Fälle liegt bei der pseudoregulären Präcession, wie wir sehen, vor. In der That beträgt der Vertikalabstand der beiden begrenzenden Parallelkreise e und e' nur die sehr kleine Gröfse 2ε. Zum Überflufs trifft aber in unserem Falle auch noch das zweite Kriterium zu: e'' wird, wie bereits erwähnt, eine sehr grofse Zahl. In der That, berechnen wir e'' nach Gleichung (9) von pag. 273, indem wir $n = Ne + n'$ setzen und n'^2 gegen N^2 vernachlässigen, so folgt

$$e'' = \frac{N^2}{2AP} - e'.$$

Dieser Wert ist nach unserer Voraussetzung über das Verhältnis $N^2 : AP$ eine sehr grofse Zahl; wir werden sogar den echten Bruch e' im Verhältnis zum ersten Gliede fortlassen können. Wir setzen also:

$$e'' = \frac{N^2}{2AP},$$

und mit demselben Grade der Annäherung:

$$\begin{cases} e'' - u_0 = \frac{N^2}{2AP}, \\ \frac{2P(e''-u_0)}{A} = \frac{N^2}{A^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Ein etwas genauerer Wert für die letztere Gröfse wäre dieser:

$$\frac{2P(e''-u_0)}{A} = \frac{N^2 - 4APu_0}{A^2}; \tag{10'}$$

wir begnügen uns im Folgenden aber lieber mit dem einfacheren Werte aus Gleichung (10).

Sowohl wegen der Kleinheit von ε wie wegen der Gröfse von e'' wird der pag. 272 abgeschätzte Fehler τ in unserem Falle sehr klein und zwar um so kleiner, je vollständiger die unserer Bewegung zu Grunde liegenden Bedingungen erfüllt sind. Wir können daher u mit beliebiger Annäherung durch die Gleichung (8′) von pag. 272 darstellen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) der vorigen Seite ergiebt sich

$$u = u_0 + \left(\frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1 - u_0^2)\right) \sin \frac{N}{A} t.$$

Die Kleinheit von ε berechtigt uns ferner, auch ψ durch die Näherungsformel (14′) von pag. 276 darzustellen. Wir sahen nämlich, dafs der Fehler in dieser Darstellung mit verschwindendem ε selbst verschwindet.

Die Koeffizienten jener Gleichung lassen sich dabei in unserem Falle vereinfachen. Es wird nämlich, wenn wir $n = Ne + n'$ setzen:

$$n - Nu_0 = N(e - u_0) + n' = N\frac{e - e'}{2} + n' = -N\varepsilon + n',$$

also mit Rücksicht auf (9) direkt

$$\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)} = \frac{P}{N}.$$

Ähnlicher Weise vereinfacht sich der zweite Koeffizient

$$\frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{(1 - u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e'' - u_0)}}$$

Nach (10) können wir hierfür schreiben:

$$\frac{N(1 - u_0^2) - 2(n' - N\varepsilon)u_0}{N(1 - u_0^2)^2};$$

da dieser Ausdruck in Gleichung (14′) von pag. 276 noch mit der kleinen Gröfse ε multipliziert erscheint, können wir ihn weiter vereinfachen, indem wir $(n' - N\varepsilon)$ gegen N vernachlässigen; die hierdurch bewirkte Ungenauigkeit ist im Resultate von der Ordnung ε^2, würde also nur die Form des Restgliedes beeinflussen. Unser zweiter Koeffizient kann daher gleich gesetzt werden:

$$\frac{1}{1 - u_0^2}.$$

Daraufhin erhalten wir aus der angezogenen Gleichung folgenden einfachen Näherungswert für ψ:

$$\psi = \frac{P}{N} t + \frac{\varepsilon}{1 - u_0^2} \cos \frac{N}{A} t.$$

Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird daher jetzt, wenn wir noch $u = \cos \vartheta$, $u_0 = \cos \vartheta_0$ setzen und für ε den Wert aus (9) eintragen,

durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt:

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \left(\dfrac{n'}{N} - \dfrac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0\right)\sin\dfrac{N}{A}t, \\ \psi = \dfrac{P}{N}t \quad + \left(\dfrac{n'}{N\sin^2\vartheta_0} - \dfrac{AP}{N^2}\right)\cos\dfrac{N}{A}t, \end{cases}$$

in genauer Übereinstimmung mit der Cykloidentheorie, wie wir sogleich noch näher ausführen werden.

Das Verhältnis dieser Formeln zu der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung durch die elliptischen Integrale ist nach den Auseinandersetzungen von pag. 274 und 277 klar. Die Kleinheit des Moduls k bez., was dasselbe bedeutet, des Fehlers τ erklärt zur genüge, weshalb die elliptischen Integrale in unserem Falle durch trigonometrische Funktionen mit guter Annäherung ersetzt werden können.

Diese Bemerkungen werden teilweise hinfällig, wenn unsere ursprünglichen Voraussetzungen nur teilweise erfüllt sind. Wenn z. B. der Anfangsimpuls nahe mit der Figurenaxe zusammenfällt und aufserordentlich grofs, aber nicht grofs gegen die Schwerewirkung ist, d. h. wenn n'/N, aber nicht AP/N^2 eine kleine Zahl ist, so wird die Bewegung von der pseudoregulären Präcession wesentlich verschieden; die Fehler in unseren Näherungsformeln können sehr beträchtlich sein. In der That wird sich ein Kreisel mit grofsem N und P ebenso verhalten, wie ein Kreisel mit entsprechend verkleinerten Werten von N und P; er kann daher die im vorigen Kapitel geschilderten allgemeinen Bewegungen beschreiben, welche mit beliebiger Genauigkeit nur durch die elliptischen Integrale dargestellt werden können. Wenn andrerseits der Eigenimpuls sehr grofs, das Schwerемoment nicht sehr grofs ist und die Impulsaxe in der Anfangslage wesentlich von der Figurenaxe abweicht, d. h. wenn AP/N^2 aber nicht n'/N klein ist, so werden die Parallelkreise e und e' nicht mehr benachbart zu sein brauchen. Immerhin ist dann noch der Wert von e'' (s. Gleichung (9) von pag. 273) sehr grofs, so dafs der Fehler in der trigonometrischen Darstellung von u auch dann noch sehr klein wird. In diesem Falle, können wir sagen, liegt ein Kreisel vor, welcher einem kräftefreien Kreisel (von mäfsigem N und verschwindendem P) benachbart ist. So wie die Bewegung des letzteren genau, so kann die des ersteren angenähert durch trigonometrische Terme beschrieben werden.

Dafs unsere Gleichungen (11) mit den früheren Formeln (7) identisch sind, erkennt man folgendermafsen: Wir ersetzen zunächst die Kugeloberfläche wieder durch ihre Tangentialebene an der betrachteten Stelle der Bahnkurve, was wegen der aufserordentlich kleinen Dimensionen der letzteren gestattet sein wird. Die mittlere Fortschreitungsrichtung

$u = u_0$ der Kreiselspitze machen wir zur x-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems (xy), dessen Anfangspunkt mit dem Orte der Kreiselspitze zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen möge. Alsdann drücken sich die rechtwinkligen Koordinaten x, y der Kreiselspitze leicht durch ihre früheren Koordinaten ψ, u aus. Da nämlich ψ (von einer additiven Konstanten abgesehen) das Azimuth ist, um welches die Projektion der Figurenaxe in der Äquatorebene von ihrer Anfangslage aus bis zur Zeit t fortgeschritten ist und da andrerseits x die horizontale Verrückung der Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche (bez. in deren Tangentialebene) während derselben Zeit bedeutet, so verhält sich ψ zu x, wie der Radius des Äquators zu dem Radius des durch die Kreiselspitze hindurchlaufenden Parallelkreises, d. h. angenähert wie 1 zu $\sin \vartheta_0$. Es wird also

$$x = \psi \sin \vartheta_0.$$

Ferner bedeutet $u - u_0 = \cos \vartheta - \cos \vartheta_0$ die vertikale Projektion der meridionalen Abweichung der Kreiselspitze von dem mittleren Parallelkreise u_0. Diese meridionale Abweichung selbst ist aber unsere Koordinate y. Wir haben daher

$$y = \frac{u - u_0}{\sin \vartheta_0} = \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0}.$$

Infolgedessen gehen die Gleichungen (9) über in:

$$(12) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{P \sin \vartheta_0}{N} t + \left(\dfrac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \dfrac{AP \sin \vartheta_0}{N^2} \right) \cos \dfrac{N}{A} t, \\ y = \left(\dfrac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \dfrac{AP \sin \vartheta_0}{N^2} \right) \sin \dfrac{N}{A} t. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich nun von den Gleichungen (7) nur durch eine Verschiebung des Koordinatensystems. Während unsere ξ-Axe früher mit der Impulskurve zusammenfiel und (vgl. Fig. 48) unsymmetrisch gegen die Bahnkurve der Kreiselspitze lag, haben wir unsere x-Axe so gewählt, dafs sie mit dem mittleren Orte u_0 der Kreiselspitze identisch ist. Wir bringen die Gleichungen (7) und (12) auch zur formalen Übereinstimmung, wenn wir setzen:

$$x = \xi, \quad y = \eta - \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2},$$

und wenn wir überdies den Anfangspunkt der Zeitmessung um $\frac{\pi A}{2N}$ verschieben.

Unsere Bahnkurve (12) können wir daher wieder geometrisch als *Cykloide* durch Abrollung eines Kreises auf einer Geraden erzeugen oder wir können auch, was im vorliegenden Fall auf dasselbe herauskommt, unsere Bewegung als *Überlagerung einer regulären Präcession und einer Nutation* im Sinne von pag. 276 auffassen.

Die Gleichungen der regulären Präcession entnehmen wir den ersten Gliedern der rechten Seiten von (11); sie lauten

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0, \quad \psi = \frac{P}{N}t. \tag{13}$$

Die Nutation beschreiben wir am besten durch ihre Gleichung in den x, y-Koordinaten, welche wir den zweiten Termen der rechten Seiten von (12) entnehmen. Wir haben

$$x = \varepsilon\cos\frac{Nt}{A}, \quad y = \varepsilon\sin\frac{Nt}{A}, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}. \tag{14}$$

Unter den speziellen Voraussetzungen, welche der pseudoregulären Präcession zu Grunde liegen, wird also die Nutation eine *kreisförmige Schwingung*; ihre horizontale und ihre meridionale Amplitude sind beide gleich ε. Dagegen sahen wir, dafs unter den allgemeinen Voraussetzungen am Schlusse des vorigen Kapitels sowie bei den der regulären Präcession benachbarten Bahnen die Nutation eine *elliptische Schwingung* war. Ferner wird die *Nutationsperiode*, d. h. die Gröfse

$$2\omega = \frac{2\pi A}{N} \tag{15}$$

bez., wenn wir statt (10) die etwas genauere Gleichung (10′) zu Grunde legen, die Gröfse

$$2\omega = \frac{2\pi A}{\sqrt{N^2 - 4APu_0}}, \tag{15′}$$

bei der pseudoregulären Präcession mit wachsendem N unendlich klein, während sie beispielsweise bei den Nachbarkurven der regulären Präcession endlich blieb. Schliefslich wird jetzt auch die *Präcessionsgeschwindigkeit* $\frac{P}{N}$ unendlich klein, während sie im allgemeinen gleichfalls einen endlichen Wert hatte.

Von den beiden Teilbewegungen, in welche wir die pseudoreguläre Präcession zerlegt haben, nimmt nun das Auge bei der Beobachtung nur die erste deutlich wahr. Allerdings ist diese Bewegung, wie wir eben hervorhoben, bei genügend grofsem N äufserst langsam. Dafür geht in ihre Gleichungen aber der Faktor t explicite ein. *Trotz des äufserst geringen Wertes der Winkelgeschwindigkeit werden wir daher, wenn wir die Beobachtungszeit nur lange genug ausdehnen, eine deutliche Präcession der Figurenaxe bemerken können.* In den Gleichungen unserer zweiten Teilbewegung dagegen tritt t nur als Argument der trigonometrischen Funktionen auf. *Diese schnell veränderlichen Terme von geringer absoluter Gröfse entziehen sich daher dauernd der Beobachtung.* Den hierdurch bezeichneten Unterschied können wir auch mit Be-

nutzung einer in der Astronomie üblichen Terminologie folgendermafsen formulieren:

Unsere erste Teilbewegung stellt eine säculare, unsere zweite eine periodische Störung der Ruhelage dar.

Während aber unsere erste Teilbewegung für die Beschreibung der Bahnkurve bez. für die Schilderung des Beobachtungsergebnisses die ausschlaggebende ist, wird die zweite Teilbewegung für die mechanische Erklärung des Vorganges die wichtigere.

Die mechanische Erklärung hat nämlich, nach den Grundgesetzen der Dynamik, nicht sowohl an den Ort, als an die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Massenteilchen anzuknüpfen. Differentiieren wir nun aber die Gleichungen unserer Bahnkurve nach t, so verschiebt sich das Gröfsenverhältnis der einzelnen Terme. Die periodischen Glieder multiplizieren sich nämlich jedesmal mit dem (sehr grofsen) Faktor $\frac{N}{A}$, während das säculare Glied den Faktor t verliert bez. (bei zweimaliger Differentiation) überhaupt verschwindet. Infolgedessen wird die Erklärung des Bewegungsvorganges wesentlich auch auf die zweite Teilbewegung Rücksicht nehmen müssen. Wollten wir, gestützt auf ein ungenaues Beobachtungsergebnis, die Bewegung als eine wirkliche reguläre Präcession behandeln, so müfste sie uns in der That unverständlich und paradox erscheinen. *Die mechanische Erklärung mufs sich vielmehr in unserem Falle gerade auf diejenigen Momente der Bewegung gründen, welche in der Beobachtung so gut wie gänzlich verloren gehen.*

In diesen Ausführungen sehen wir die vollständige Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung. Wir erkennen insbesondere, *warum die Beschreibung der unter den üblichen experimentellen Bedingungen vor sich gehenden Kreiselbewegung als einer regulären Präcession zwar die Beobachtungen sehr gut wiedergeben, aber dennoch für die mechanische Erklärung unzureichend sein kann.*

In historischer Hinsicht bemerken wir schliefslich, dafs die pseudoreguläre Präcession, wenn auch nicht unter diesem Namen, zum ersten Male von Poisson*) aus den allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet worden ist. Nur ist bei Poisson ebenso wie bei den späteren Analytikern**) das in geometrischer und mechanischer Hinsicht Wesentliche nicht so ausführlich wie hier aus den Formeln herausgeschält. Der Leser läuft bei der Lektüre dieser rein analytischen Darstellungen Gefahr, gerade das Wichtige zu übersehen oder mangelhaft aufzufassen.

*) Vgl. Traité de Mécanique, t. II, Nr. 432, pag. 175 der zweiten Ausgabe.
**) Z. B. Kirchhoff, Mechanik, 7. Vorlesung, § 5.

§ 3. Die in der Litteratur vorkommenden populären Erklärungen des Kreiselphänomens.

Die elementaren Darstellungen der Kreiseltheorie befassen sich nahezu ausschliefslich mit der pseudoregulären Präcession, weil diese für das Experiment hauptsächlich in Betracht kommt und weil die allgemeine Kreiselbewegung sich mit elementaren Hülfsmitteln überhaupt nicht darstellen läfst. Wir geben daher an dieser Stelle eine Übersicht der wichtigeren populären Erklärungen, ohne dabei irgend auf Vollständigkeit Anspruch zu machen. Das Gesamtbild, welches sich hier ergiebt, ist kein sehr erfreuliches. Wir werden auf mancherlei unhaltbare oder unvollständige Erklärungsversuche stofsen. Übrigens war gerade dieser Umstand die ursprüngliche Veranlassung zur Abfassung der vorliegenden ausführlichen Monographie.

1. Eine erste Kategorie von Darstellungen begnügt sich mit einer blofsen Schilderung der Vorgänge. Vor allen Dingen ist es folgendes Experiment, welches betont wird: Wenn man den Kreisel in starke Rotation versetzt und alsdann auf die Figurenaxe einen Zug wirken läfst, etwa dadurch, dafs man die Kreiselspitze durch einen herumgeschlungenen Faden zur Seite zieht, so weicht die Axe scheinbar senkrecht gegen die Richtung des Fadens aus. Diese und ähnliche Dinge werden besonders lebhaft in dem früher citierten*) interessanten Schriftchen von Perry vorgetragen, wo der Kreisel geradezu mit einem eigensinnigen Tier verglichen wird, welches immer in anderer Richtung läuft, als es angetrieben wird.

Das genannte Experiment kann dazu dienen, das Verhalten der Figurenaxe unter dem Einflufs der Schwere zu erläutern. In der That können wir die Schwerkraft mit einem Zuge vergleichen, welche den Schwerpunkt und also auch die Figurenaxe in jedem Augenblicke nach unten zu bewegen strebt. Dem Experiment entsprechend werden wir also erwarten, dafs die Spitze des schweren Kreisels scheinbar senkrecht gegen die Schwerkraft, d. h. in horizontaler Richtung ausweicht.

Als blofses Beobachtungsergebnis mufs man eine solche Darstellung der Verhältnisse gelten lassen. Sie hat ihre Richtigkeit aber nur innerhalb der Ungenauigkeitsgrenzen der Beobachtung. Thatsächlich wissen wir, dafs die anfängliche Bewegungsrichtung der Kreiselspitze, falls wir sie ohne Hinzufügung eines seitlichen Anstofses dem Zuge des Fadens bez. dem Einflufs der Schwere überlassen, nicht senkrecht gegen den Zug, sondern in die Richtung des Zuges fällt (vgl. die nebenstehende

*) pag. 134.

Zackenkurve [gemeine Cykloide]) und dafs nur die Kleinheit der Bögen, aus denen sich die Bahnkurve bei sehr grofsem Eigenimpuls zusammensetzt, den genannten Eindruck im Experimente hervorruft.

2. Die beschriebene ungenaue Beobachtung sucht man nun gelegentlich durch einen unrichtigen Schlufs aus den Prinzipien der Mechanik, wie folgt, zu erklären: Der Kreisel rotiere anfänglich um die Figurenaxe, welche irgendwie gegen die Vertikale geneigt sei. Die Figurenaxe stellt dann gleichzeitig die Rotations- und die Impulsaxe dar. Nun kommt der kontinuierliche Zug der Schwerkraft zur Wirkung. Diesem entspricht ein Drehimpuls, welcher senkrecht gegen die durch Figurenaxe und Vertikale gelegte Meridianebene gerichtet ist und welcher sich mit dem ursprünglichen Drehimpulse nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammensetzt. Man sagt nun: Die Diagonale des Parallelogramms giebt die veränderte Lage der „Axe". Das ist richtig bezüglich der Impulsaxe und beim Kugelkreisel auch bezüglich der Rotationsaxe. In den Erklärungen, die wir im Auge haben, wird aber unter „Axe" fernerhin stillschweigend die Figurenaxe verstanden, für die das Gesagte keineswegs zutrifft; es wird also geschlossen, dafs die Figurenaxe beständig senkrecht gegen die genannte Meridianebene, d. h. auf einem Kreiskegel um die Vertikale fortschreiten müsse! — In Wirklichkeit bewegt sich die Figurenaxe natürlich auf einem Kreiskegel um die jeweils veränderliche Drehungsaxe, welche ihrerseits durch die Lage des Impulses bestimmt ist. Die Folge ist, dafs die Figurenaxe anfangs keineswegs senkrecht gegen die Richtung des Zuges ausweicht, sondern sich vertikal nach unten bewegt. Fällt, wie hier vorausgesetzt wurde, die Impuls- und Figurenaxe anfangs zusammen, so ist eine wirkliche reguläre Präcession schlechterdings unmöglich. Die Bedingung für die letztere besteht vielmehr, wie wir früher sahen, darin, dafs Impuls- und Figurenaxe in gewisser Weise auseinanderfallen, d. h. dafs der Kreiselspitze aufser dem Zuge der Schwerkraft ein ganz bestimmter seitlicher Anstofs erteilt werde.

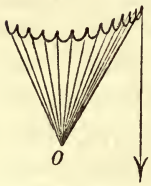


Fig. 50.

Das ganze Verfahren, welches wir im Vorstehenden besprochen haben, kann als ein vorzügliches Beispiel einer „quaternio terminorum" gelten. Der Irrtum rührt einfach daher, dafs das Wort Axe in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wurde; derselbe ist um so merkwürdiger, als man notwendiger Weise fragen mufs: Was wird aus der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der Anfangsrotation nachläfst, in welchem Falle auch die Beobachtung eine Abweichung von der regulären Präcession deutlich erkennen läfst?

Der genannte Irrthum ist keinem geringeren, wie dem berühmten

französischen Experimentator Foucault und seinem Konkurrenten Sire passiert und findet sich seitdem häufig in der Litteratur. Wir verweisen bezüglich genauerer Angaben auf eine verdienstvolle Arbeit von Gilbert*): Etude historique et critique sur le problème de la rotation.

3. Wir gehen nun auf die sogenannte *Airysche Erklärung* ein, die gleichfalls in einem wesentlichen Punkte bedenklich ist. Als Astronom interresiert sich Airy**) namentlich für das Problem der Präcession und Nutation des Erdkörpers; diesem schickt er seine elementare Theorie der Kreiselbewegung als Einleitung voraus.

Airy leitet zunächst den Satz von dem Parallelogramm der Drehungsvektoren ab, hebt aber nicht hervor, dafs dieser Satz lediglich eine kinematische Bedeutung hat. Den Begriff des Impulsvektors und das Parallelogramm der Impulsvektoren, welches in kinetischer Hinsicht allein maſsgebend ist und den Ablauf der Bewegung reguliert, hat Airy nicht. Die Massenverteilung des Körpers bleibt angeblich ganz allgemein.

Airy behandelt nun ein Rotationsproblem, welches mit dem des schweren Kreisels nur eine entfernte Ähnlichkeit hat. Er setzt nämlich voraus, dafs auf den Körper eine Kraft wirkt, welche ihn beständig um eine zur *Drehungsaxe OD* senkrechte und in einer festen Ebene ΔOD gelegenen Axe $O\Delta$ zu drehen strebt. Die Gröfse der Kraft soll unveränderlich sein. (Hiergegen ist zu bemerken, dafs bei dem wirklichen Rotationsproblem des schweren Kreisels die Axe der Zusatzdrehung (die Knotenlinie) nicht auf der Drehungsaxe sondern auf der Figurenaxe senkrecht steht und im allgemeinen auch nicht konstant ist, ein Umstand, dessen sich Airy selbstverständlich vollkommen bewufst ist. Es handelt sich bei Airy zunächst eben nur um ein fingiertes Problem.) Durch successive Anwendung des Satzes vom Parallelogramm der Drehungsvektoren schliefst Airy, dafs der Drehungsvektor der Gröfse nach konstant bleibt und der Richtung nach in der Ebene ΔOD mit konstanter Geschwindigkeit umläuft.

In diesem Schlusse liegt aber, wenn wir zunächst jenes fingierte Gesetz über Richtung und Gröfse der Zusatzdrehung einmal acceptieren, ein prinzipieller Fehler. Es wird nämlich dabei auf die Möglichkeit der „Eigenbewegung“ des Drehungsvektors keine Rücksicht genommen. Auch wenn die äufsere Drehkraft, welche bei Airy die Rotation um $O\Delta$ hervorbringt, nicht wirken würde, wird die Drehungsaxe OD

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles, 1878. Auf einen ähnlichen Fehler macht gelegentlich Herr Franke aufmerksam: Ztschr. f. d. mathem. u. naturw. Unterricht, Bd. 17, 1886.

**) Airy, Mathematical Tracts, Cambridge 1831. Vgl. das Kapitel: Precession of the equinoxes Nr. 1—15.

im allgemeinen im Körper und im Raume wechseln. In der That beschreibt ja der kräftefreie Kreisel im allgemeinen eine reguläre Präcession, bei welcher der Rotationsvektor auf einem Kreiskegel um die Impulsaxe herumgeführt wird. Airy dagegen nimmt stillschweigend an, dafs, wenn die äufsere Kraft plötzlich zu wirken aufhören würde, die Drehungsaxe in der augenblicklichen Lage verbleiben würde.

Die genannte Voraussetzung ist nur in dem besonderen Falle des Kugelkreisels erfüllt, wo, wie wir betonten, jede Axe als permanente Drehungsaxe angesprochen werden kann. Infolgedessen müssen wir sagen: *Die Airyschen Sätze gelten nicht für den allgemeinen Fall eines rotierenden Körpers, sondern im Gegenteil nur für den speziellsten Fall, den Fall des Kugelkreisels.*

Überhaupt möchten wir bei dieser Gelegenheit vor einer Überschätzung der kinetischen Bedeutung des Drehungsvektors warnen. *Der Drehungsvektor lehrt im Grunde nur den augenblicklichen kinematischen Bewegungszustand kennen. In kinetischer Hinsicht kommt es nicht auf den Drehungs-, sondern auf den Impulsvektor an.* Dieser setzt sich mit dem Drehmomente der äufseren Kräfte in einfachster Weise (nach dem Parallelogrammgesetze) zusammen und bestimmt so zusammen mit der Massenverteilung des Körpers den Verlauf der Bewegung. Der Drehungsvektor folgt darauf der Lage des Impulsvektors und bewegt sich gerade so, wie es ihm durch die Lage des Impulsvektors und die Massenverteilung des Körpers vorgeschrieben wird. Das Parallelogramm der Drehungsvektoren ist zwar kinematisch richtig, aber kinetisch nichtssagend, weil der Drehungsvektor auch ohne Hinzufügung einer „äufseren", d. h. einer durch äufsere Kräfte hervorgerufenen Drehung, im Körper und im Raume fortwandern kann.

(Ein einfaches Beispiel, auf welches Herr Koppe (vgl. unten) aufmerksam gemacht hat, möge zeigen, wie man in kinetischen Fragen durch das Parallelogramm der Drehungen zu falschen Resultaten geführt werden kann.

Wir fragen nach dem Drehmoment, welches bei einem (symmetrischen) Kreisel zum Verdrehen seiner Figurenaxe erforderlich ist. Genauer wollen wir die Frage folgendermafsen formulieren: Der Kreisel rotiere anfangs um seine Figurenaxe OF und sei dem Einflufs äufserer Kräfte entzogen. Seine Rotationsgeschwindigkeit sei r, sein Impuls $Cr = N$. Darauf drehen wir die Figurenaxe zwangsmäfsig um den kleinen Winkel $d\vartheta$, so zwar, dafs, wenn wir die Axe loslassen, der Kreisel mit der ursprünglichen Geschwindigkeit r um die abgeänderte und von jetzt ab im Raume stillestehende Axe OF_1 permanent rotiere (vgl. Fig. 51). Gesucht wird das hierzu erforderliche Drehmoment.

Zur Herbeiführung des genannten Sachverhaltes ist nach der Impulstheorie zweierlei nötig: (1) Man mufs der Figurenaxe eine Drehgeschwindigkeit um die auf OF und OF_1 senkrechte Axe OH erteilen und mufs diese Geschwindigkeit aufheben, wenn die Lage OF_1 erreicht ist. Die zugehörigen Impulse, welche gleichfalls um die gemeinsame Senkrechte von OF und OF_1 erfolgen, heben sich gegenseitig auf ($OH = -OH_1$). (2) Man mufs aufserdem für die Umlagerung des Impulsvektors aus der Lage OF in die Lage OF_1 sorgen. Thäte man dieses nämlich nicht, so würde die Figurenaxe, nachdem sie die Lage OF_1 erreicht hat, um die unveränderte Lage OF des Impulsvektors eine reguläre Präcession beginnen, anstatt, wie wir verlangten, im Raume stille zu stehen. Der zur Umlagerung erforderliche Zusatzimpuls ist $di = Nd\vartheta$; seine Axe OG liegt in der Ebene OFF_1 senkrecht zu den unendlich wenig verschiedenen Axen OF und OF_1. Die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses $\frac{di}{dt}$ giebt nach Axe und Gröfse das Drehmoment an, welches wir bei Verdrehung der Figurenaxe aufwenden müssen. Die richtige Antwort auf unsere Frage, wie sie sich aus dem Parallelogramm der Impulsvektoren ergiebt, lautet also:

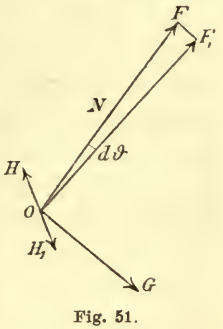


Fig. 51.

$$N\vartheta' = Cr\vartheta'.$$

Dieselbe Frage möge nun nach dem Parallelogramm der Rotationsvektoren beantwortet werden. Zur Umlagerung und nachherigen Fixierung der Figurenaxe ist wieder im Ganzen kein Drehmoment erforderlich. Zur Umlagerung der Drehungsaxe mufs man nach dem Parallelogramm der Rotationen die Drehung $r\vartheta'$ um die Axe OG hinzufügen. Das dieser Drehung entsprechende Drehmoment findet man in bekannter Weise durch Multiplikation der genannten Winkelgeschwindigkeit mit dem zu OG gehörigen Trägheitsmomente A. Das Drehmoment, nach welchem gefragt ist, wäre hiernach

$$Ar\vartheta'.$$

Der falsche und der richtige Wert stimmen, wie man sieht, nur im Falle des Kugelkreisels überein. In jedem anderen Falle kann die Anwendung des Parallelogramms der Rotationen in der Kinetik irreführend werden.)

Dementsprechend ist die Airysche Betrachtung für den Fall des allgemeinen oder des symmetrischen Kreisels dahin zu ergänzen, dafs man überall statt Rotationsvektor Impulsvektor sagt. So macht es

Poinsot in seiner *Théorie des équinoxes.**) Er betrachtet übrigens einen etwas allgemeineren Fall wie Airy, indem er den Zusatzimpuls senkrecht zu dem vorhandenen Impulse und überdies in einer festen Ebene annimmt, welche nicht durch den vorhandenen Impuls hindurchzugehen braucht (während Airy, wie erwähnt, eine Zusatzdrehung in einer durch die jeweilige Drehungsaxe hindurchgehenden Ebene voraussetzt). Führt man in diesem Falle die successiven Parallelogrammkonstruktionen mit dem Impulsvektor aus, so sieht man, dafs dieser einen Kreiskegel um die Normale der festen Ebene beschreibt, also im Speziellen einen vertikal gestellten Kreiskegel, wenn man die feste Ebene als Horizontalebene denkt. Natürlich deckt sich auch das Poinsotsche Problem wegen der angegebenen Voraussetzung über die Richtung des Zusatzimpulses mit dem Problem des schweren Kreisels nicht vollständig, wie Poinsot selbst ausdrücklich hervorhebt. Dementsprechend ist auch das angegebene Resultat, dafs der Impulskegel ein Kreiskegel wird, für den schweren Kreisel nur angenähert richtig.

Unsere eigene populäre Erklärung der pseudoregulären Präcession im Anfange des vorigen Kapitels stellt geradezu eine Weiterführung der Poinsotschen Darstellung vor. Wir haben dort auf Grund der Poinsotschen Impulsprinzipien die successiven Lagen der Figurenaxe im Raum ermittelt und haben auch den Sinn der Abweichungen festgestellt, welche die wirkliche Bewegung gegenüber unseren immerhin nur angenäherten Konstruktionen aufweisen wird.

Nach einer anderen Richtung wie Poinsot (nämlich durch Berücksichtigung der Nutationen) vervollständigt Herr A. Schmidt die Airysche Erklärung in seiner anregenden Arbeit**) „Die elementare Behandlung des Kreiselproblems“. Indessen müfste man auch hier die Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen, weil der Verfasser durchweg mit dem Parallelogramm der Rotationen operiert, statt, wie es für kinetische Fragen im allgemeinen unerläfslich ist, mit dem Parallelogramm der Impulsvektoren.

Wie hervorgehoben, werden weder die Airyschen noch die Poinsotschen Voraussetzungen bei der allgemeinen Bewegung des schweren Kreisels realisiert. Der Zusatzimpuls bez. die Zusatzdrehung steht hier weder senkrecht auf der Drehungsaxe noch auf dem Impulsvektor, sondern auf der Figurenaxe. Nur bei der genauen regulären Präcession sind wegen der besonderen gegenseitigen Lage von Vertikalen, Rotations-Figuren- und Impulsaxe die Voraussetzungen der Airyschen bez. der Poinsotschen Betrachtungen genau erfüllt.

*) Connaissance des temps, Paris 1857, Einleitung, Nr. 1—10.

**) Mathem.-naturw.-Mitteilungen von Böklen, 1886, Heft III.

Die Nutzanwendung der Airyschen Betrachtung auf den Fall des schweren Kreisels wird in der theoretischen Physik von Hrn. v. Lang*) versucht. Um ein den Airyschen Voraussetzungen analoges Problem zu haben, nimmt v. Lang als Anfangszustand eine einfache Rotation um die Figurenaxe an, so dafs anfangs die der Schwere entsprechende Zusatzdrehung auf der Drehungsaxe senkrecht steht. Dieser Sachverhalt mufs sich aber eben wegen der Schwerewirkung sofort ändern. Wenn trotzdem vorausgesetzt wird, dafs die hinzukommende Drehung (besser der Drehungsimpuls) auf der instantanen Drehungsaxe (besser Impulsaxe) dauernd senkrecht steht, so scheint eine abermalige Zweideutigkeit in der Verwendung des Wortes „Axe" vorzuliegen. Dementsprechend ist auch das Resultat, zu welchem v. Lang kommt, nicht richtig. Nach seiner Ableitung müfste die Drehungsaxe *genau* einen Kreiskegel um die Vertikale beschreiben, was, wie wir wissen, bei dem vorausgesetzten Anfangszustande *nur angenähert* und *auch dies nur bei sehr grofsen Rotationsgeschwindigkeiten* richtig ist. Überdies müfste man, wenn man die v. Langsche Benutzung des Drehungsvektors aufrecht halten will, die ausdrückliche Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen.

Eine korrekte Darstellung giebt im Anschlusse an Poinsot De Jonquières**), welcher das Auftreten der Spitzenkurve ableitet.

4. Auf wesentlich anderen Prinzipien wie die zuletzt genannte oder wie unsere eigene elementare Betrachtung am Anfange des vorigen Paragraphen beruht die bekannte *Poggendorffsche Erklärung.****) Während wir den Kreisel als ein einheitliches mechanisches System behandelten, geht Poggendorff auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte zurück. Bei der Kürze und dem ganz elementaren Charakter der Darlegungen ist die Poggendorffsche Erklärung keine vollständige und giebt leicht zu Irrtümern Anlafs. Wir reproduzieren dieselbe in etwas freier Weise, ohne mit Sicherheit behaupten zu können, dafs wir im Folgenden die Meinung des Verfassers, die aus seinen Worten nicht ganz eindeutig festzustellen ist, genau wiedergeben.

Wir betrachten mit Poggendorff ein Schwungrad von horizontal gestellter Figurenaxe, welches um einen Punkt O der Axe frei drehbar ist und welchem eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit um die Axe erteilt worden ist. Wir denken uns das freie Ende der Axe in der Vertikalebene ein Stückchen nach unten bewegt, was dem Anscheine

*) § 55.

**) Théorie élémentaire du mouvement de la toupie, Revue maritime et coloniale, 1886.

***) „Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine." Poggendorffs Annalen, Bd. 90, pag. 348.

nach der Einwirkung der Schwere auf das Schwungrad entspricht. Diese Bewegung bezeichnen wir kurz als Bewegung I. Offenbar werden durch diese Bewegung die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Massenpunkte teils parallel mit sich verschoben, teils aus ihrer Richtung abgelenkt. Letzteres erfordert für jeden Punkt eine Kraft, deren Gröfse und Richtung gleich ist der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses in dem betreffenden Massenpunkte. Setzt man alle diese Kräfte zu einer Drehkraft zusammen, so findet man leicht eine Drehkraft von vertikaler Axe. Letztere müfsten wir ausüben, wenn wir die Bewegung I erzwingen wollen. Üben wir sie nicht aus, denken uns aber trotzdem dem Schwungrade die Bewegung I erteilt, so bleibt eine der genannten entgegengesetzt gleiche Drehkraft übrig, welche, wenn sie allein wirksam wäre, eine Bewegung der Figurenaxe in horizontaler Richtung bewirken würde. Letztere werde als Bewegung II bezeichnet. Die Bewegung II würde nun ihrerseits eine Richtungsänderung in den Einzelimpulsen der Massenpunkte bewirken. Die hierzu erforderlichen Kräfte setzen sich zu einer Drehkraft von horizontaler Axe zusammen. Diese müfste wiederum von aufsen hinzugefügt werden, wenn die Bewegung II für sich möglich sein soll. Im anderen Falle bleibt eine entgegengesetzt gleiche Drehkraft von horizontaler Axe übrig, welche eine Bewegung III bewirkt, der zufolge die Figurenaxe vertikal nach oben, also der Bewegung I entgegen gedreht wird. Das Auftreten der Bewegung III erklärt nun, warum die durch die Schwerkraft gegebene Bewegungstendenz I auf die Dauer nicht anhält, sondern durch die allmählich wachsende Bewegungstendenz III überwunden werden kann. Das Auftreten von II zeigt gleichzeitig, dafs die Punkte der Figurenaxe unterdessen eine horizontale Geschwindigkeitskomponente erhalten können. Die wirkliche Bewegung, müssen wir uns vorstellen, besteht in einer Kombination der Bewegungen I, II und III (und zwar, wie wir nach Früherem hinzufügen können, in einer derartigen Kombination, dafs sich die zur Hervorbringung dieser Bewegungen erforderlichen Drehkräfte jederzeit zu einer dem Schwerемoment genau gleichen Drehkraft zusammensetzen).

Wie man sieht, wird durch die vorstehende ziemlich rohe Betrachtung nur ein sehr ungefähres Bild der resultierenden Bewegung gewonnen. In welcher Stärke die unterschiedenen Bestandteile I, II, III der Bewegung jeweils auftreten, bleibt völlig unentschieden. Über die Gestalt der Bahnkurve, welche die Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche beschreibt, kann daher lediglich auf Grund der obigen Überlegung nichts Näheres angegeben werden.

Die Poggendorffsche Ausdrucksweise ist, wie gesagt, von der vorstehenden etwas verschieden. Sie legt den Irrtum nahe, als ob die

Bewegungen I und III sich gegenseitig kompensieren könnten, so dafs eine rein horizontale Bewegung der Kreiselspitze übrig bleiben würde. Dies ist natürlich gänzlich unmöglich, sofern das Schwungrad in der Anfangslage keine horizontale Fortschreitungskomponente besitzt.

In den Lehrbüchern*), welche die Poggendorffsche Erklärung wiedergeben, wird besagter Irrtum vielfach explicite begangen.

Die Poggendorffsche Erklärung ist von Hrn. M. Koppe**) vervollständigt und bis zur quantitativen Bestimmung der Bewegung durchgeführt. Koppe führt den durch Poggendorff ersichtlich umschriebenen Begriff der Coriolisschen Kraft beim einzelnen Massenpunkte (vgl. Kap. III, § 7) ein und beschreibt die Bahnkurve der Kreiselspitze in durchaus korrekter Weise als Cykloide. Wir heben insbesondere die wertvollen kritischen Bemerkungen zu Beginn seiner Arbeit hervor, welche uns bei der Abfassung des Vorstehenden vielfach nützlich waren, ohne übrigens die von Hrn. Koppe gegen die analytische Behandlung im allgemeinen erhobenen Ausstellungen unterschreiben zu wollen. Letztere dürften durch die Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen präcisiert sein.

Gleichfalls mit der Coriolisschen Kraft operiert die oben***) citierte, im Wesentlichen richtige Arbeit von Jouffret.

An Poggendorff knüpft auch F. Heinen in der Beschreibung seines Rotationsapparates an.†) Die Heinensche Darstellung ist aber viel umständlicher wie die Poggendorffsche und giebt auch nicht mehr als eine allgemeine qualitative Vorstellung der zu erwartenden Bewegung.

Alles in allem möchten wir das Zurückgehen auf die Punktmechanik, welches der zuletzt betrachteten Gruppe von Erklärungen gemeinsam ist, aus den pag. 300 genannten Gründen nicht empfehlen. (Man vergleiche in dieser Hinsicht etwa die allerdings richtige aber äufserst umständliche Ableitung des oben (pag. 311) besprochenen Drehmomentes $Cr\vartheta'$, wie sie in einer Note von Hrn. Koppe††) gegeben wird, mit unserer obigen Bestimmung desselben, welche jedenfalls an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läfst.)

5. Als besonders verfehlt müssen solche Erklärungen†††) gelten, welche das im Experiment zu beobachtende Aufrichten der Kreiselaxe

---

*) Z. B. Müller-Pouillet, Bd. I, § 74.

**) Über die Bewegung des Kreisels. Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 4. Jahrg., 1890.

***) pag. 190.

†) Braunschweig 1857.

††) Zur Kreiselbewegung, Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 9. Jahrg., 1896.

†††) Vgl. z. B. Munter, Ztschr. f. d. mathem. u. phys. Unterricht, Bd. 26, pag. 565.

aus den Prinzipien der abstrakten Dynamik herleiten wollen. Wir wissen, daſs der bisher betrachtete ideale, reibungslose Kreisel sich keineswegs aufrichtet, sondern dauernd dieselbe mittlere Neigung gegen die Vertikale behauptet. Das Aufrichten der Kreiselaxe erfolgt, wenn überhaupt, nur durch die Reibung im Unterstützungspunkte, worüber wir uns später verbreiten werden.

§ 4. Über die Stabilität des aufrechten Kreisels. Geometrische Diskussion.

Ein besonderer Fall der regulären Präcession ist derjenige, wo sich die Bahnkurve auf einen Punkt, den höchsten oder tiefsten Punkt der Einheitskugel zusammenzieht. Der Kreisel rotiert dann mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die vertikal gestellte Figurenaxe. Wir wollen diese interessante Bewegung ausführlich behandeln, um daran unsere Begriffe über die Stabilität der Bewegungen zu bilden und so die allgemeineren Untersuchungen des sechsten Paragraphen vorbereiten.

Die Figurenaxe kann bei dieser Bewegung sowohl vertikal nach oben wie vertikal nach unten gerichtet sein. Wir werden uns auf die erstere Annahme beschränken, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, wenn wir nur nötigenfalls den als Figurenaxe bezeichneten Halbstrahl mit dem entgegengesetzten vertauschen.

Wir werden also $\vartheta = 0$ rechnen und haben dabei zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$ ist. Auch hier sprechen wir vom Kugelkreisel mit dem Trägheitsmomente A.

Die zu besprechende Bewegung bezeichnen wir kurz als *die Bewegung des aufrechten Kreisels.*

Zunächst bemerken wir, daſs unsere Koordinaten φ, ψ, ϑ zur Behandlung des vorliegenden Falles ungeeignet sind. Offenbar wird nämlich bei aufrechter Figurenaxe die Knotenlinie in der Äquatorebene unbestimmt. Mithin haben auch die Winkel φ und ψ (die Winkel der X- bez. der x-Axe gegen die Knotenlinie) keine selbständige Bedeutung. Wohl aber kommt eine solche dem Winkel $\varphi + \psi = \chi$ zu, welcher direkt den Winkel zwischen X- und x-Axe darstellt, also die Drehung des Kreisels gegen den Raum miſst. Mit Benutzung dieser Koordinate ist unsere Bewegung einfach durch die folgenden beiden Gleichungen charakterisiert

$$\vartheta = 0, \quad \chi' = \text{const.} \tag{1}$$

Wir überzeugen uns nun leicht, *daſs die Bewegung des aufrechten Kreisels bei beliebigen Werten der Rotationsgeschwindigkeit χ' eine mögliche, mit den fundamentalen Impulsgesetzen verträgliche Bewegung ist.* Bei

der durch (1) dargestellten Bewegung fällt nämlich der Impuls dauernd mit der Vertikalen zusammen und hat eine konstante Länge. Die Änderung des Impulsvektors ist also jederzeit gleich Null. Aufserdem ist bei vertikaler Stellung der Figurenaxe die Schwerewirkung $P \sin \vartheta$ fortgesetzt gleich Null. Es besteht mithin die durch unsern Impulssatz geforderte Gleichheit zwischen den Änderungen des Impulses und den Zusatzimpulsen der äufseren Kraft. Durch die Gleichungen (1) wird also in der That eine mögliche Bewegung des schweren Kreisels dargestellt, welchen Wert auch immer die Rotationsgeschwindigkeit χ' haben möge.

Offenbar gilt für die aufrechte Bewegung die Beziehung

$$n = N. \tag{2}$$

Da nämlich Impuls, Figurenaxe und Vertikale beständig zusammenfallen, so ist die Vertikalprojektion des Impulses mit der Projektion auf die Figurenaxe sowie direkt mit der Länge des Impulsvektors identisch.

Die Bedingung (2) ist übrigens nicht nur für die gleichmäfsige Rotation des aufrechten Kreisels charakteristisch, sondern überhaupt für jede Bahnkurve, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. In der That wird allemal beim Passieren des Nordpols die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe identisch mit der Projektion auf die Vertikale, weil ja beide Richtungen in einem solchen Momente zusammenfallen. Da überdies die Impulskomponenten n und N, wie wir wissen, konstant sind, so besteht die angegebene Relation für solche Bewegungen allgemein.

Wir gehen nun zu den Stabilitätsfragen über und erteilen zu dem Zwecke dem Kreisel während seiner Rotation um die Vertikale einen Anstofs. Diesen charakterisieren wir durch den zugehörigen Drehstofs hinsichtlich des Unterstützungspunktes und repräsentieren ihn durch einen Vektor. Dabei wird vorausgesetzt, dafs die Länge des so erhaltenen Vektors eine beliebig vorgegebene Gröfse nicht übersteigt. Über die Richtung des Drehstofsvektors dürfen wir der Allgemeinheit wegen zunächst nichts voraussetzen. Indessen zeigt es sich, dafs wir diese Richtung als horizontal annehmen dürfen. Wenn nämlich ein schiefgerichteter Drehstofsvektor vorliegt, so zerlegen wir diesen in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Die vertikale Komponente bewirkt lediglich eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels und läfst den Charakter der Bewegung ungeändert. Wir können daher von der vertikalen Komponente absehen und einen Drehstofs von horizontaler Axe voraussetzen.

Der ursprünglich vorhandene Impuls setzt sich natürlich mit diesem Drehstofs nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Wir bezeichnen den Zusatzimpuls mit $[\Theta_0]$, da er uns die gleichzeitig zur Figurenaxe und zur Vertikalen senkrechte Komponente des Gesamtimpulses zur Zeit $t = 0$ angiebt. Die Beziehung zwischen unserer Impulskomponente $[\Theta_0]$ und der durch sie hervorgerufenen Rotationskomponente wird dabei nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor:

$$[\Theta_0] = A\vartheta_0', \tag{3}$$

wo ϑ_0' den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit ϑ' bedeutet. Die Länge $|i|$ des Gesamtimpulses, welche bei der ungestörten Bewegung konstant und gleich N war, wird jetzt variabel. Speziell ergiebt sich für den Anfangswert $|i_0|$ nach dem Pythagoras die Gleichung:

$$|i_0|^2 = N^2 + [\Theta_0]^2.$$

Schliefslich berechnen wir noch die Impulskonstante k mittels der Gleichung (3) von pag. 219. Da für $t = 0$ auch $\vartheta = 0$ ist, so ergiebt sich

$$k = |i_0|^2 + 2AP = N^2 + [\Theta_0]^2 + 2AP. \tag{4}$$

Um den Charakter der durch unseren Anstofs ausgelösten Bewegung zu überblicken, fragen wir vor allem, wie tief die Kreiselspitze auf der Einheitskugel heruntersinkt. Wir sehen deshalb zu, in welcher Weise die Wurzel e' der Gleichung $U = 0$ von $[\Theta_0]$ abhängt. Dabei müssen wir auf die ursprüngliche Form dieser Gleichung auf pag. 238 zurückgehen, weil die hieraus abgeleitete Gleichung $U_1 = 0$ wegen des vorgezogenen Faktors $1:(1-e^2)$, welcher in unserem Falle $(e = 1)$ unendlich grofs wird, für das Folgende unbrauchbar ist. Wir haben nach der angezogenen Stelle mit Rücksicht auf die Beziehung $n = N$:

$$A^2 U = -N^2(1-u)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2), \tag{5}$$

oder, wenn wir k der Gleichung (4) entsprechend ausdrücken:

$$A^2 U = -N^2(1-u)^2 + \left([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\right)(1-u^2). \tag{5'}$$

Auf der rechten Seite steht, wie es sein mufs, der Faktor $1-u$, welcher der bekannten Wurzel $e = 1$ entspricht. Wir sondern diesen ab und bekommen für die beiden übrigen Wurzeln die quadratische Gleichung:

$$-N^2(1-u) + \left([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\right)(1+u) = 0.$$

Hier mögen wir $[\Theta_0] = v$ setzen und die so entstehende Gleichung

$$v^2(1+u) - (1-u)\left(N^2 - 2AP(1+u)\right) = 0 \tag{6}$$

in einer u, v-Ebene geometrisch deuten.

Die entstehende Kurve wird wieder von der dritten Ordnung. Sie liegt symmetrisch gegen die Abscissenaxe (u-Axe) und besteht aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Die Gestalt der Kurve untersuchen wir auf Grund ihrer vertikalen Tangenten, welche hier besonders leicht zu bestimmen sind.

Die Gleichungen der vertikalen Tangenten, sowie die Lage ihrer Berührungspunkte stellen wir wie folgt zusammen:

Gleichung:	$u = +1$	Berührungspunkt:	$v = 0$
„	$u = -1$	„	$v = \infty$
„	$u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$	„	$v = 0.$

Die an zweiter Stelle genannte Tangente ist hiernach Asymptote. Für uns kommt es wesentlich darauf an, wie die dritte Tangente gegen die übrigen liegt. Wir unterscheiden in der Hinsicht vor allem zwei Fälle, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$.

Erster Fall: $P < 0$.

Die dritte Tangente liegt links von der Asymptote. Reelle Werte von v ergeben sich für die Gebiete

$$-1 < u < +1 \quad \text{und} \quad -\infty < u < -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Der unpaare Zug verläuft in dem Streifen zwischen $u = -1$ und $u = +1$, der paare Zug erstreckt sich von der Tangente $u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$ nach links ins Unendliche (vgl. Fig. 52). Wir ziehen in beliebiger Nähe der Abscissenaxe die Parallele $v = [\Theta_0]$ und bringen sie zum Schnitt mit dem unpaaren Zuge. Die Abscisse dieses Schnittpunktes liefert uns den Parallelkreis $u = e'$. Wie man sieht, kommt die Gröfse e' der Einheit um so näher, je kleiner wir $[\Theta_0]$ nehmen. (Dabei wird, wie wir des Folgenden wegen bemerken, die Differenz $1 - e'$ von der Ordnung $[\Theta_0]^2$, sie stellt also „eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung“ dar, wenn wir den Anstofs $[\Theta_0]$ „unendlich klein von der ersten Ordnung“ werden lassen.) Infolgedessen können wir durch Wahl von $[\Theta_0]$ erreichen, dafs die Bahnkurve des ursprünglich aufrechten Kreisels nach Hinzufügung

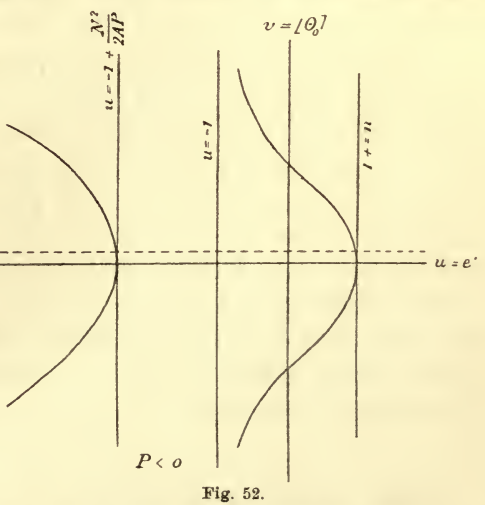


Fig. 52.

unseres Anstofses in einer beliebig engen Nachbarschaft zur ursprünglichen Bahnkurve, dem Nordpole, verläuft. *Hinsichtlich der Bahnkurve findet also im Falle* $P < 0$ *sicher ein stetiger Übergang von der ursprünglichen zu der abgeänderten Bewegung statt.*

Die Bahnkurve der Kreiselspitze bringt indessen, wie wir wissen, die Bewegung nicht vollständig zum Ausdruck, indem sie über die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe keinen Aufschluſs giebt.

Bei der ungestörten Bewegung wird diese gemessen durch den Winkel χ; da sich die Winkelgeschwindigkeit χ' durch den Impuls N bei der aufrechten Bewegung folgendermafsen ausdrückt:

$$\chi' = \frac{N}{A},$$

so haben wir einfach (bei spezieller Wahl der Anfangszeit)

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

Nach Hinzufügung des Anstofses $[\Theta_0]$ wollen wir, um vergleichbare Gröfsen zu haben, die Rotation um die Figurenaxe durch den entsprechenden Winkel χ messen. Wir haben dann mit Rücksicht auf (2):

$$\chi' = \varphi' + \psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} + \frac{N - nu}{A(1-u^2)} = \frac{2N}{A(1+u)}.$$

Da nun u in beliebiger Nähe von 1 bleibt, entwickeln wir nach Potenzen von $u - 1$ und vernachlässigen alle höheren Potenzen. So ergiebt sich

$$\chi' = \frac{N}{A} - \frac{N}{A}\frac{u-1}{2}.$$

Hier ist der zweite Term der rechten Seite, wie aus einer obigen Bemerkung hervorgeht, im Verhältnis zu dem Anstofse $[\Theta_0]$ von der zweiten Ordnung unendlich klein. Solche Gröfsen pflegt man aber bei der in der Litteratur üblichen Handhabung der Stabilitätsbetrachtungen nicht mitzunehmen. Auch bei den Nachbarbewegungen der regulären Präcession im ersten Paragraphen dieses Kapitels haben wir, indem wir den Rest R in dem Ausdrucke von ψ vernachlässigten, die Glieder zweiter Ordnung (mit dem Faktor ε^2) unterdrückt. Beschränken wir uns also auch jetzt auf die Glieder erster Ordnung, so werden wir, indem wir die Integration nach t ausführen, wieder auf die ursprüngliche Formel zurückgeführt:

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

(Man bemerke übrigens, dafs die jedenfalls nicht unbedenkliche Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung nur eine vorläufige ist und dafs sie für die in § 6 zu entwickelnde definitive Auffassung der Stabilitätskriterien gar nicht in Frage kommt.)

Unsere Betrachtung zeigt, dafs der Winkel χ der abgeänderten Bewegung dem Winkel χ der ursprünglichen bis auf Glieder zweiter Ordnung dauernd benachbart bleibt. Diese Aussage bezieht sich jedoch nur auf den Fall, wo der hinzugefügte Drehstofs eine rein horizontale Axe hat. Bei allgemeinerem Anstofs, durch welchen nicht nur ein gewisser Wert von $[\Theta_0]$ hinzugefügt, sondern auch die ursprüngliche Impulskomponente N abgeändert wird, liegt die Sache natürlich anders.

Betrachten wir z. B. den einfachsten Fall, wo $[\Theta_0] = 0$ genommen und N um die kleine Gröfse N' vermehrt wird. Die Bewegung bleibt dann nach wie vor die des aufrechten Kreisels. Der Winkel χ bei der abgeänderten Bewegung bestimmt sich durch die Gleichung

$$\chi = \frac{N + N'}{A} t.$$

Wie man sieht, weicht derselbe von dem Winkel χ der ungestörten Bewegung um ein Glied ab, welches der ersten Potenz des Anstofses N' proportional ist. Nichtsdestoweniger können wir zwischen die ursprüngliche und die abgeänderte Bewegung durch Verkleinerung von N' solche Bewegungen einschalten, welche einen stetigen Übergang von dem χ der einen zu dem der anderen Bewegung vermitteln.

Nach alledem werden wir zweifellos und zwar unabhängig davon, ob wir die soeben gemachte Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung zulassen wollen oder nicht, sagen können:

Die Bewegung des aufrechten Kreisels im Falle $P < 0$ ist sicher eine stabile Bewegung.

Dieses Resultat stimmt natürlich vollkommen mit der bekannten Thatsache überein, dafs die Gleichgewichtslage des nicht aufgezogenen Kreisels ($N = 0$) eine stabile ist, wenn der Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt ($P < 0$).

Zweiter Fall: $P > 0$.

Sehr viel interessanter ist der zweite Fall $P > 0$. Die dritte der pag. 319 genannten vertikalen Tangenten liegt alsdann rechts von der Asymptote $u = -1$. Je nachdem sich dieselbe auch rechts von der Tangente $u = +1$ oder links von derselben befindet, ergeben sich zwei Unterfälle a) und b).

Der erste Unterfall tritt ein, wenn

(a) $$+1 < -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 > 4AP,$$

der zweite, wenn

(b) $$+1 > -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 < 4AP.$$

Wir vergleichen hiermit unsere frühere Unterscheidung zwischen

dem starken und dem schwachen Kreisel. Da wir $P > 0$ vorausgesetzt haben, müssen wir das Kriterium (3′) von pag. 249 heranziehen.

Tragen wir hier, der aufrechten Anfangslage der Figurenaxe entsprechend, für e den Wert $+1$ ein, so gehen die Ungleichungen jenes Kriteriums gerade in die Ungleichungen (a) und (b) über. *Der Unterfall* (a) *entspricht also einem starken, der Unterfall* (b) *einem schwachen Kreisel.* (Nebenbei bemerkt, ist der Fall eines negativen P stets den *starken* Kreiseln zuzurechnen, weil hier die Ungleichung (a) selbstverständlicher Weise befriedigt wird.)

Wir setzen zunächst wieder unsere Kurven dritter Ordnung für unsere beiden Fälle $P > 0$ her, wie sie der Gleichung (5) entsprechen. Bei dem starken Kreisel, Fall (a), zieht sich der unpaare Zug durch den Streifen -1 bis $+1$ hindurch, indem er $u = -1$ im Unendlichen und $u = +1$ auf der Abscissenaxe berührt. Bei dem schwachen Kreisel dagegen ist der unpaare Zug in den Streifen -1 bis $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ eingeschlossen. Der paare Zug liegt beidemal rechts von dem unpaaren und berührt entweder die Tangente $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ oder die Tangente $+1$ in ihrem Schnittpunkte mit der Abscissenaxe.

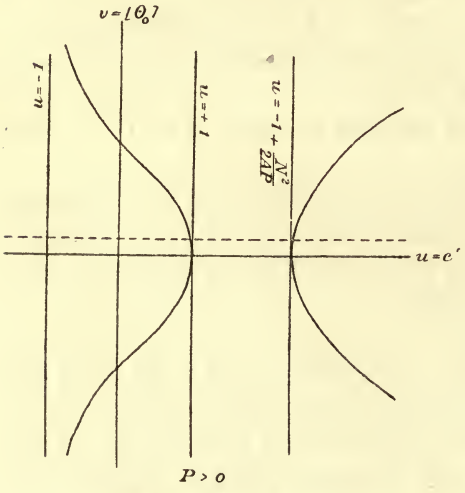


Fig. 53. Starker Kreisel.

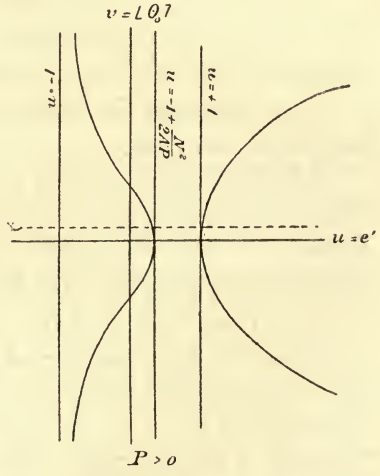


Fig. 54. Schwacher Kreisel.

Es kommt nun darauf an, aus der Gestalt dieser Kurven den Charakter der Bahn bei einer Störung $[\Theta_0]$ zu erschliefsen.*) Wir ziehen zu dem Zweck wieder die Parallele $v = [\Theta_0]$ zu der Abscissenaxe, deren Schnittpunkt mit dem unpaaren Zuge durch seine Abscisse die Gröfse

*) Vgl. hierzu: F. Klein, On the stability of the sleeping top. American Bulletin, 1896.

des zweiten Parallelkreises bestimmt. Hierbei ergiebt sich nun ein sehr interessanter Gegensatz zwischen dem starken und schwachen Kreisel.

In Fig. 53 liegt nämlich der genannte Schnittpunkt in unmittelbarer Nähe des Punktes $u = 1$, $v = 0$.

Bei dem starken Kreisel fällt also der Parallelkreis e′ um so kleiner aus, je kleiner wir den Anstofs $[\Theta_0]$ *wählen, und geht bei verschwindendem* $[\Theta_0]$ *in den Nordpol* $e = 1$ *stetig über. Die Bahnkurve der Kreiselspitze verharrt in unmittelbarer Nähe der ursprünglichen punktförmigen Bahnkurve; ihre Dimensionen können durch Verkleinerung des Anstofses beliebig verkleinert werden.*

In Fig. 54 dagegen unterscheidet sich die Abscisse des soeben konstruierten Schnittpunktes von der Einheit stets um eine endliche Gröfse, welche nicht unter $1 + 1 - \frac{N^2}{2AP}$ herabgedrückt werden kann.

Bei dem schwachen Kreisel ändert sich also die Lage des zweiten Parallelkreises in unstetiger Weise. Bei der geringsten Störung springt dieser Parallelkreis, welcher sich bei der ungestörten Bewegung auf den Nordpol reduziert, sogleich in einen Kreis über, dessen e′ kleiner ist als $-1 + \frac{N^2}{2AP}$. *Die Dimensionen der Bahnkurve können daher durch Verkleinerung von* $[\Theta_0]$ *nicht beliebig verkleinert werden. Die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels nimmt also im System der Bahnkurven eine isolierte Stellung ein.*

Die letzten Bemerkungen zeigen bereits, dafs der schwache Kreisel in aufrechter Stellung instabil ist. Was den starken Kreisel im Falle $P > 0$ betrifft, so können wir bei ihm dieselben Überlegungen anstellen, wie oben im Falle $P < 0$. Wir sprechen daraufhin den allgemeinen Satz aus:

Der starke Kreisel ist in aufrechter Stellung stabil, der schwache Kreisel labil.

Den Grenzfall zwischen dem starken und schwachen Kreisel, d. h. den Kreisel mit $N^2 = 4AP$ haben wir ersichtlich den stabilen Fällen zuzurechnen. Alsdann können wir nämlich den Anstofs $[\Theta_0]$ noch gerade so klein bemessen, dafs sich e' beliebig wenig von

$$-1 + \frac{N^2}{2AP} = -1 + 2 = +1$$

unterscheidet. Wir fügen daher hinzu:

Der Kreisel, welcher auf der Grenze zwischen dem starken und dem schwachen Kreisel steht, ist in aufrechter Lage gleichfalls stabil.

Übrigens wird die Bahnkurve im stabilen wie im labilen Falle die Gestalt einer *Rosette* haben, welche sich (wegen der allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung) in regelmäfsigen Zeitintervallen fortgesetzt durch den Nordpol der Kugel hindurchzieht und aus lauter

kongruenten Schleifen besteht. Der Unterschied zwischen beiden Fällen offenbart sich nur in der *Gröfse dieser Rosette*, oder, genauer gesagt, in der *Veränderung ihrer Gröfse bei Verkleinerung des Anstofses*. Die Rosette im labilen Falle ist eine nicht minder reguläre, periodisch sich reproduzierende Kurve, wie im stabilen Falle, welche sogar, unter besonderen sogleich näher anzugebenden Umständen, von der Rosette des stabilen Falles für das Auge durch nichts verschieden ist. Wir betonen diesen Punkt besonders, weil hierüber vielfach irrige Vorstellungen verbreitet sein dürften.

Die Engländer bezeichnen in höchst anschaulicher Weise die aufrechte Kreiselbewegung als Bewegung des „sleeping top“. Wenn nämlich, wie wir annehmen wollen, nicht nur mechanische, sondern auch geometrische Rotationssymmetrie um die Figurenaxe vorhanden ist, so scheint der Kreisel bei aufrechter Stellung dem Auge zu ruhen. Dafs diese Ruhe aber nur eine scheinbare ist, zeigt sich, wenn wir ihn durch einen Anstofs gewissermafsen aufwecken. Alsdann wird seine ursprünglich verborgene Bewegung auch äufserlich sichtbar. Nach seinem Verhalten beim Aufwachen beurteilen wir die Stabilität oder Labilität. Wenn sein Aufwachen ein sanftes ist, nennen wir die aufrechte Bewegung stabil; wenn dagegen die leiseste Störung hinreicht, um unverhältnismäfsig grofse Elongationen hervorzurufen, heifst die Bewegung labil.

Dafs überhaupt im Falle $P > 0$ bei aufrechter Stellung Stabilität möglich ist, stellt eine Thatsache von ganz eigenartigem Interesse dar, welche zunächst wieder paradox erscheinen möchte. Während der nicht aufgezogene Kreisel im Falle $P > 0$ in aufrechter Stellung natürlich gänzlich instabil ist und auf jeden kleinsten Anstofs mit einer vollen Pendelschwingung reagiert, wird er, in genügend starke Rotation versetzt ($N^2 > 4AP$), befähigt, dem Einflufs der Schwere bis zu einem gewissen Grade Widerstand zu leisten. Der schwache Kreisel vermittelt dabei den Übergang zwischen dem Kreisel von der Eigenrotation Null und dem starken Kreisel.

Die Lage des Parallelkreises e', bis zu welchem die Figurenaxe bei irgend einem Anstofs mindestens herabsinkt, kann als ein Mafs für die gröfsere oder geringere Schwäche des Kreisels angesehen werden. Die Lage dieses dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechenden Parallelkreises ist, wie wir sahen, gegeben durch

$$e' = -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Für den Kreisel von der Eigenrotation Null wird dieser Wert gleich -1; die Figurenaxe beschreibt alsdann, wie soeben erwähnt,

im Nordpole angestofsen einen gröfsten Kreis, welcher durch den Südpol hindurchgeht. Die im allgemeinen eintretende Rosette ist hier ausgeartet. Bei wachsendem N wächst der Wert von e' kontinuierlich und nähert sich für $N^2 = 4AP$ dem Werte $e = +1$.

Der Übergang zwischen dem labilen und dem stabilen Falle der aufrechten Kreiselbewegung ist auf diese Weise gewissermafsen selbst ein stetiger. Wenn nämlich N^2 zwar kleiner als $4AP$ aber doch von $4AP$ sehr wenig verschieden ist, wird die Elongation der Bahnkurve bei beliebig kleinem Anstofse zwar von Null verschieden aber doch unbeträchtlich; sie kann sogar durch geeignete Annahme von N unter jeden gegebenen Wert herabgedrückt werden. Immerhin bleibt auch dann die charakteristische Eigenschaft des labilen Falles bestehen, dafs, nachdem wir einmal über N verfügt haben, die Dimensionen der Bahnkurve durch Abänderung von $[\Theta_0]$ nicht beliebig verkleinert werden können.

Theoretisch ist also in diesem Falle (wo $\frac{4AP}{N^2} - 1$ eine absolut genommen kleine negative Zahl ist) die Bewegung jedenfalls labil; im Experiment dagegen würde sich eine derartige Bewegung von einer theoretisch stabilen nicht merklich unterscheiden. Beidemal haben wir eine Rosette von qualitativ ähnlichem Verlauf und aufserordentlich kleinen Dimensionen. Wir mögen daher etwa von einer *theoretischen und praktischen Labilität und Stabilität* sprechen und sagen: *Im Falle, wo N^2 nur sehr wenig kleiner ist als $4AP$, ist die Bewegung theoretisch labil, praktisch aber immer noch stabil.*

Im sechsten Paragraphen dieses Kapitels werden wir noch andere einfachere Beispiele von theoretischer Labilität und praktischer Stabilität, sowie von theoretischer Stabilität und praktischer Labilität kennen lernen. —

Wir mögen schliefslich allgemein nach solchen Bewegungen des schweren *symmetrischen* Kreisels fragen, welche aus einer blofsen Rotation um eine im Raum feste Axe bestehen.

Aus Symmetriegründen geht hervor, dafs eine solche Axe keine andere, als die Vertikale sein kann und dafs die Drehung um diese Axe gleichförmig erfolgen mufs. Die Bewegung gehört alsdann zur Klasse der regulären Präcessionen, und zwar handelt es sich hier speziell um eine solche Präcession, bei welcher der Herpolhodiekegel unendlich dünn ist, bei welcher also μ den Wert Null hat. Die andere Präcessionskonstante ν, welche uns hier direkt die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit angiebt, ist daraufhin bestimmt. Die Theorie des Deviationswiderstandes liefert nämlich (s. Gl. (3) von pag. 77) für ν die Gleichung:

$$P = (C - A)\nu^2 \cos\vartheta, \tag{15}$$

Nur in dem Falle $\vartheta = 0$ verliert diese Gleichung ihre Gültigkeit, weil wir an der angezogenen Stelle aus der zunächst in Betracht kommenden Gleichung den Faktor $\sin \vartheta$ herausgehoben haben, vermöge dessen diese Gleichung im Falle $\vartheta = 0$ identisch erfüllt ist. *Mithin ist die aufrechte Figurenaxe die einzige Gerade, um welche sich der Körper mit jeder beliebigen Geschwindigkeit permanent drehen kann. Jede andere Axe erfordert, falls sie als permanente Axe auftreten soll, einen (bis auf das Vorzeichen) bestimmten Wert der Winkelgeschwindigkeit.*

Je nachdem dieser Wert reell oder imaginär ausfällt, werden wir die betreffende Axe als „zulässige" oder „unzulässige Drehungsaxe" bezeichnen. Um die Entscheidung hierüber zu treffen, wollen wir das Gesamtbündel der von O auslaufenden Halbstrahlen durch die Äquatorebene des Kreisels in zwei Halbbündel zerlegen. Indem wir uns die Figurenaxe so gewählt denken, dafs der Schwerpunkt bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe über den Unterstützungspunkt zu liegen kommt ($P > 0$), wollen wir dasjenige Halbbündel, welches den Schwerpunkt enthält, als oberes, das andere als unteres bezeichnen. Alsdann zeigt die Gleichung (15):

Bei dem verlängerten Kreisel ($C < A$) sind alle Halbstrahlen des unteren, bei dem abgeplatteten alle des oberen Halbbündels zulässige permanente Drehungsaxen. Jeder dieser Axen kommen zwei entgegengesetzt gleiche Werte der Winkelgeschwindigkeit zu. Speziell bei dem Kugelkreisel sind die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten allemal $\pm \infty$.

§ 5. Fortsetzung. Analytische Behandlung der durch einen Anstofs abgeänderten aufrechten Kreiselbewegung. — Formeln für die pseudoregulären Präcessionen von kleinem Präcessionskreise.

Wir werden jetzt die im vorigen Paragraphen gegebene qualitative Diskussion der aufrechten Kreiselbewegung durch eine angenäherte quantitative Darstellung ergänzen, unter dem Gesichtspunkte, von hieraus eine exakte Grundlage für unsere spätere Kritik der Methode der kleinen Schwingungen zu gewinnen, einer Methode, welche in der modernen Dynamik eine bekannte wichtige Rolle spielt. Dabei haben wir an die Näherungsformeln vom neunten Paragraphen des vorigen Kapitels anzuknüpfen. Die dortigen Näherungsformeln für u können auf den vorliegenden Fall direkt übertragen werden. Dagegen bedürfen die Formeln für ψ einer Modifikation, weil in diesen der Term $1 - u_0^2$ im Nenner vorkam, welcher jetzt wenigstens in den stabilen Fällen bei verschwindendem Anstofs verschwindet.

Wir schreiben zunächst die Näherungsformel für u im vorliegenden Falle hin. Um mit den Bezeichnungen des genannten § 9 in Einklang

zu bleiben, verstehen wir unter e den unteren, unter e' den oberen der beiden begrenzenden Parallelkreise, so dafs $e' = 1$ wird. Die in unserer Näherungsformel auftretende Gröfse ε bedeutete den halben Vertikalabstand der Kreise e' und e, so dafs jetzt

$$\varepsilon = \frac{1-e}{2}; \tag{1}$$

die Gröfse u_0 war der „mittlere Parallelkreis", dessen Ebene von den Ebenen der Parallelkreise e und e' den gleichen Vertikalabstand ε besitzt, woraus im vorliegenden Falle folgt:

$$u_0 = 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Die Gleichung (8′) von pag. 272 können wir daher mit Benutzung der in (7) pag. 272 eingeführten Abkürzung folgendermafsen schreiben:

$$1 - u = \frac{1-e}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{\omega}\right); \quad \omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi. \tag{3}$$

Hierbei haben wir gleichzeitig eine für das Folgende bequeme Verschiebung des Anfangspunktes der Zeit vorgenommen, indem wir statt des Sinus den Cosinus gesetzt haben, was zur Folge hat, dafs zu Beginn der Bewegung die Figurenaxe vertikal steht ($u = 1$ für $t = 0$).

In (3) führen wir statt u und e die entsprechenden Winkel ein, indem wir setzen:

$$u = \cos\vartheta, \quad e = \cos\eta$$

und gehen von den ganzen zu den halben Winkeln über. Dann folgt, wenn wir rechts und links die Quadratwurzel ziehen:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\pi t}{2\omega}, \tag{4}$$

Die Unsicherheit in dieser Formel bestimmt sich aus der Gröfse τ des relativen Fehlers von t. Nach Gleichung (5) von pag. 272 ist

$$|\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1, \tag{5}$$

worin nach (1) $e = 1 - 2\varepsilon$, $e' = 1$ zu setzen und e'' aus Gleichung (9) von pag. 273 zu berechnen ist. Da bei der aufrechten Bewegung $n = N$ ist, so können wir in der letztgenannten Gleichung den Faktor $2(1-e)$ in Zähler und Nenner heben und erhalten

$$e'' = \frac{N^2}{AP(1+e)} - 1 = \frac{N^2 - 2AP(1-\varepsilon)}{2AP(1-\varepsilon)}. \tag{6}$$

Infolgedessen wird

$$|\tau| < \sqrt{\frac{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)^2}{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)}} - 1. \tag{5′}$$

Diese Abschätzung liefert in jedem Falle einen Anhalt für die Beurteilung des Genauigkeitsgrades der Gleichung (4).

Wir fragen insbesondere nach denjenigen Fällen, wo die begrenzte Genauigkeit von Gleichung (4) in eine beliebige Genauigkeit übergeht, wo also $|\tau|$ beliebig klein gemacht werden kann. Dies tritt offenbar, allgemein zu reden, *in den stabilen Fällen* ein, wo wir durch Wahl des Anstofses erreichen können, dafs ε beliebig klein wird. Alsdann weicht nämlich der Wert der Quadratwurzel in (5′) von 1 beliebig wenig ab.

In den labilen Fällen dagegen haben wir die Gröfse von ε nicht in unserer Gewalt. Die rechte Seite von (5′) wird dann, selbst bei beliebig kleinem Anstofse, eine von Null verschiedene Gröfse; es liegt kein Grund zu der Annahme vor, dafs unsere Darstellung (4) auch in diesem Falle eine beliebig genaue wäre.

Dabei haben wir *den Grenzfall zwischen den stabilen und den labilen Fällen* ($N^2 = 4AP$) besonders zu berücksichtigen. Wir sahen, dafs wir diesen Fall bezüglich des Verhaltens der Bahnkurve durchaus den stabilen Fällen zuzuordnen haben, weil die Bewegung der Kreiselspitze bei hinreichend kleinem Anstofse in unmittelbarer Nähe des Nordpoles verläuft. Dagegen zeigt sich jetzt, dafs bezüglich des Genauigkeitsgrades unserer Annäherungsformeln dieser Grenzfall auf Seite der labilen Fälle steht. Setzen wir nämlich in (5′) $N^2 = 4AP$, so wird die rechte Seite

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon}} - 1,$$

d. h., wenn wir ε hinreichend klein machen, gleich

$$\sqrt{2} - 1.$$

Hier haben wir also trotz des stabilen Charakters und trotz der Möglichkeit einer beliebigen Verkleinerung der Bahnkurve einen Fall vor uns, in dem wir von unserer Näherungsformel nur eine begrenzte Genauigkeit erwarten können.

Ähnlich liegen die Verhältnisse *in den theoretisch labilen, praktisch aber stabilen Fällen*, wo $N^2 - 4AP$ zwar kleiner als Null, aber nur äufserst wenig von Null verschieden ist und wo gleichzeitig bei hinreichend kleinem Anstofse auch ε äufserst klein ausfällt. Auch in diesen Fällen genügt die Kleinheit von ε nicht, um die Gröfse des Fehlers beliebig herabzudrücken.

Zu Letzterem wäre erforderlich, dafs ε nicht nur klein schlechtweg, sondern auch klein gegen $(4AP - N^2)/4AP$ wäre, was nicht der Fall ist, da, wie wir pag. 323 sahen, die Differenz 2ε der Werte von e und e'

mindestens gleich $\frac{4AP - N^2}{2AP}$ ist. Mithin haben wir auch in diesem ebenso wie in den theoretisch und praktisch labilen Fällen nur begrenzte Annäherung zu erwarten.

Im Zusammenhange damit möge noch eine Bemerkung über diejenigen stabilen Fälle Platz finden, wo $N^2 - 4AP$ zwar gröfser als Null, aber nur äufserst wenig von Null verschieden ist. In diesen Fällen ist es allerdings möglich, durch Wahl des Anstofses die Dimensionen der Bahnkurve und insbesondere den Wert von ε beliebig zu verkleinern, es ist also möglich, ε nicht nur klein, sondern auch klein gegen $(N^2 - 4AP)/4AP$ zu machen; unsere Näherungsformel würde für *so* klein bemessene Anstöfse als beliebig genau gelten können. Sobald wir aber den Anstofs nur ein wenig gröfser nehmen, so zwar, dafs ε nicht mehr klein gegen $(N^2 - 4AP)/4AP$ wird, kann der Fehler sogleich beträchtlich wachsen. Infolgedessen würde die Genauigkeit unserer Formel für alle nicht gar zu kleinen Anstöfse doch nur eine begrenzte sein. Wir werden in diesem Falle von einer *theoretisch beliebigen, praktisch aber begrenzten Annäherung sprechen.*

Die letzten etwas subtilen Unterscheidungen wollen wir noch einmal zusammenfassend so formulieren:

Unsere Näherungsformel besitzt eine theoretisch und praktisch begrenzte Genauigkeit in allen instabilen Fällen und in demjenigen stabilen Falle, welcher sich auf der Grenze von Stabilität und Labilität befindet. Sie besitzt eine in theoretischer und praktischer Hinsicht beliebige Genauigkeit in denjenigen stabilen Fällen, welche genügend weit von den labilen Fällen entfernt sind. Dagegen haben wir theoretisch beliebige, praktisch aber begrenzte Genauigkeit in denjenigen Fällen, welche zwar stabil sind, aber der Grenze der Labilität sehr nahe liegen.

Sodann wollen wir die Näherungsformel für ψ ableiten. Dabei werden wir, anstatt uns auf die allgemeinen Formeln von pag. 275 ff. zu stützen, die Untersuchung lieber von vorne beginnen, weil sie sich in dem vorliegenden Falle weiter führen läfst und einfacher gestaltet, wie es im allgemeinen möglich war.

Wir gehen also aus von der Gleichung

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}.$$

Da bei der aufrechten Bewegung $n = N$ ist, so können wir rechterhand den Faktor $1 - u$ fortheben. Nehmen wir noch mit der rechten Seite eine identische Umformung vor, so erhalten wir:

$$\psi' = \frac{N}{A} \frac{1}{1+u} = \frac{N}{2A}\left(1 + \frac{1-u}{1+u}\right).$$

Indem wir nun zu einer angenäherten Darstellung übergehen, beschränken wir uns in der Klammer auf das erste Glied. Das zweite liefert dann die erforderliche Fehlerabschätzung. Unsere angenäherte Darstellung soll also lauten, wenn wir sogleich die Integration nach t ausführen und die unwesentliche Integrationskonstante gleich Null setzen:

$$\psi = \frac{N}{2A} t. \tag{7}$$

Der Fehler ist dabei genau gegeben durch

$$f = \int \frac{N}{2A} \frac{1-u}{1+u} dt.$$

Wir können $N > 0$ voraussetzen, in welchem Falle der Integrand dauernd positiv ist. Setzen wir für u seinen kleinsten Wert $e = 1 - 2\varepsilon$ ein, so verkleinern wir den Nenner und vergrößern gleichzeitig den Zähler des Integranden. Infolgedessen ist sicher

$$f < \int \frac{N}{2A} \frac{2\varepsilon}{2-2\varepsilon} dt,$$

d. h.

$$f < \frac{N}{2A} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} t. \tag{8}$$

Somit haben wir eine obere Grenze für den absoluten Fehler der Näherungsformel (7) bestimmt. Der relative Fehler $\frac{f}{\psi}$ wird dementsprechend kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{8'}$$

Ebenso einfach wie die Fehlerabschätzung ist die Diskussion des Genauigkeitsgrades von Gleichung (7). Die Genauigkeit wird offenbar eine beliebige, wenn wir, gleichviel wie, erreichen können, dafs ε beliebig klein wird; sie wird voraussichtlich eine begrenzte sein, wenn wir ε oder was dasselbe bedeutet, die Dimensionen der Bahnkurve nicht nach Belieben verkleinern können. Wir werden also sagen müssen:

Die Gleichung (7) *giebt eine beliebig gute Annäherung in allen stabilen Fällen* (*mit Einschluſs des Grenzfalles zwischen Stabilität und Labilität*), *sowie in den praktisch stabilen und theoretisch labilen Fällen; sie giebt dagegen nur eine begrenzte Annäherung in den Fällen thatsächlicher* (*praktischer*) *Labilität.*

Man bemerke, dafs hier die Diskussion wesentlich anders ausfällt, wie oben die Untersuchung des Genauigkeitsgrades von Gleichung (4). —

Nach dieser vorbereitenden Diskussion der Näherungsformeln untersuchen wir den Charakter der verschiedenen Bewegungen, wie er sich auf Grund unserer Näherungsformeln ergiebt. Zunächst fassen wir jetzt

diejenigen Fälle näher ins Auge, welche gleichzeitig durch (4) und (7) beliebig gut dargestellt werden, d. h. die stabilen Fälle, welche hinreichend weit von der Grenze der Labilität entfernt sind, bei hinreichender Kleinheit des Anstofses $[\Theta_0]$.

Offenbar können wir in diesen Fällen, da ja die Dimensionen der Bahnkurve verschwindend klein sein sollen, in (4) $\sin\frac{\eta}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2}$ durch $\frac{\eta}{2}$ und $\frac{\vartheta}{2}$ ersetzen. Gleichzeitig wollen wir den Wert von ω in Gleichung (3) vereinfachen, indem wir näherungsweise $\varepsilon = 0$, $u_0 = 1$ setzen. Dann ergiebt sich aus (6) und (3)

$$e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP}, \quad \omega = \frac{A\pi}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{9}$$

Die Gleichungen der Bahnkurve nehmen daher folgende Gestalt an:

$$\begin{cases} \vartheta = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\}, \\ \psi = \frac{N}{2A}\, t. \end{cases} \tag{10}$$

Für die Vorstellung und Zeichnung ist es bequem, die Bahnkurve auf die Aquatorebene zu projizieren. Wir können hierzu eine Orthogonalprojektion benutzen (bei der stereographischen Projektion würde sich dasselbe Bild, nur im halben Mafsstabe, ergeben). Bezeichnen x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Projektionspunktes bezüglich eines im Mittelpunkt der Einheitskugel gelegenen Koordinatenkreuzes, so haben wir etwa:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \cos\frac{N}{2A}\, t, \\ y = \sin\vartheta\sin\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \sin\frac{N}{2A}\, t. \end{cases} \tag{11}$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung können wir folgendermafsen mit Worten beschreiben:

Die Bewegung der Horizontal-Projektion der Kreiselspitze besteht aus einer gewöhnlichen harmonischen Schwingung (dargestellt durch den ersten Faktor in x und y) von der Amplitude η und der viertel Schwingungsdauer ω, verbunden mit einer Drehung der Schwingungsrichtung (dargestellt durch den zweiten Faktor) von der Winkelgeschwindigkeit $N:2A$.

Die Gestalt der Bahnkurve wird wesentlich durch den Winkel bedingt, um welchen das Azimuth ψ etwa während der Zeit ω zunimmt. Wir bezeichnen denselben wie früher durch ψ_ω und haben nach (7) und (9)

$$\psi_\omega = \frac{\pi}{2} \frac{N}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{12}$$

Ersichtlich ist

$$\psi_\omega > \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P > 0,$$

$$\psi_\omega < \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P < 0.$$

In dem Grenzfalle $P = 0$ wird ψ_ω gerade gleich $\pi/2$. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird dann einfach ein Kreis, der Präcessionskreis der kräftefreien Bewegung; Axe der Präcession ist der um den Anstofs $[\Theta_0]$ abgeänderte Anfangsimpuls N. Letztere Bahnkurvenbestimmung gilt übrigens aufser für den Grenzfall $P = 0$ auch für den Fall $N = \infty$, wie aus dem schon mehrfach benutzten Prinzipe folgt, wonach ein Kreisel von unendlich grofsem Eigenimpuls und endlichem Schweremomente P sich ebenso verhält, wie ein schwereloser Kreisel von endlichem N.

Die Gestalt der Bahnkurven ist hiernach in allen stabilen Fällen, wo unsere beiden Näherungsformeln beliebig genau werden, leicht zu übersehen. Die nachfolgenden charakteristischen Figuren, welche man bei allen analogen Schwingungsvorgängen wiederfinden wird, erläutern drei Typen derselben, $P > 0$, $P = 0$ bez. $N = \infty$ und $P < 0$. Die Bahnkurve in Fig. 55 schliefst sich zufällig fast genau, Fig. 56 stellt den Übergang zwischen 55 und 57 dar.

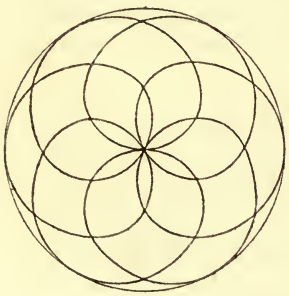


Fig. 55.

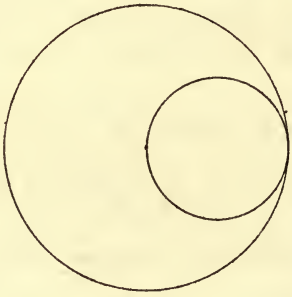


Fig. 56.

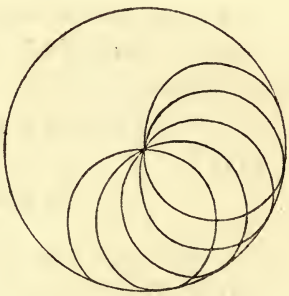


Fig. 57.

Wie wir sehen, sind unsere Schwingungen im stabilen Falle tautochron, d. h. in erster Annäherung ihrer Zeitdauer nach unabhängig von der Gröfse des Anstofses $[\Theta_0]$ und der damit zusammenhängenden Gröfse der Amplitude η, vorausgesetzt, dafs beide Gröfsen hinreichend klein genommen werden. Unsere Schwingungen zeigen also dasselbe Verhalten, welches von den sogenannten kleinen Pendelschwingungen her bekannt ist und welches für die sogenannten „kleinen Schwingungen“ überhaupt charakteristisch ist.

Die kleinen Pendelschwingungen müssen sich natürlich als Spezial-

fall unter die Schwingungen des aufrechten Kreisels und zwar speziell eines Kreisels von verschwindendem Trägheitsmomente C einordnen. Da das Pendel in vertikaler Lage nur stabil ist, wenn der Massenpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt, müssen wir im Vorhergehenden $P<0$ voraussetzen. Und zwar haben wir unter m die schwingende Masse, unter l die Pendellänge verstanden:

$$P = -mgl, \quad A = ml^2.$$

Die Formel (9) liefert daher, wegen $N = Cr = 0$:

$$4\omega = 2\pi\sqrt{\frac{A}{-P}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die bekannte Gleichung für die Periode der vollen Pendelschwingung.

Wir wenden uns nun zu den instabilen Fällen, sowie zu den theoretisch stabilen, praktisch aber instabilen Fällen. Auch zur Beurteilung dieser Fälle können die obigen Näherungsformeln von Nutzen sein; wir müssen uns dabei nur gegenwärtig halten, dafs die Genauigkeit dieser Darstellung keine beliebige mehr ist, und müssen die Gröfse der möglichen Fehler nach den Ungleichungen (5′) und (8′) in jedem Falle abschätzen. Jedenfalls werden wir aus dieser (wenngleich mit endlichen Fehlern behafteten) Darstellung schliefsen dürfen, dafs der qualitative Charakter der Bahnkurve im allgemeinen ein ähnlicher sein wird, wie in den stabilen Fällen, nur dafs die Dimensionen je nach dem Grade der Labilität sich vergröfsern und dafs im einzelnen quantitative Abweichungen von dem einfachen Sinusgesetz Platz greifen. Im grofsen und ganzen werden daher die Bahnkurven auch im labilen Falle, wie bereits pag. 324 hervorgehoben, Rosetten von ähnlicher Gestalt wie die vorhergehenden Figuren sein. Wollen wir die Bahnkurven in den labilen Fällen dagegen beliebig genau berechnen, so werden wir offenbar zu den elliptischen Integralen zurückgreifen müssen.

Natürlich müssen wir dabei nicht die für die Verhältnisse des stabilen Kreisels vereinfachte Näherungsformel (10), sondern die allgemeine Formel (4) zu Grunde legen. Insbesondere würde es ein grober Fehler sein, wenn wir die Schwingungsperiode ω aus der Gleichung (9) statt aus (3) entnehmen wollten. Die letztere Gleichung wird auch in den labilen Fällen ein vernünftiges Resultat liefern, welches um so brauchbarer ist, je kleiner sich der Fehler τ stellt. Die Gleichung (9) dagegen liefert ein ganz unsinniges Ergebnis. Es würde sich nämlich bei einem labilen Kreisel wegen $N^2 - 4AP < 0$ ein imaginärer Wert für ω berechnen. Es wäre offenbar eine handgreifliche Verdrehung des wahren Sachverhaltes, wenn man aus dieser Berechnung von ω schliefsen wollte, dafs die Bewegung des instabilen Kreisels unperiodisch

verlaufe und die Kreiselspitze sich dementsprechend je länger je mehr von dem Nordpole entferne. Trotzdem findet man oft diesen gänzlich falschen Schlufs gemacht. Was aber noch viel merkwürdiger ist, es liefert diese Verdrehung, zum Prinzip erhoben, ein, wie wir später sehen werden, sehr fruchtbares Instrument, um über die Stabilität der Bewegungen ein vorläufiges Urteil zu gewinnen; man nennt dieses Verfahren die Methode der kleinen Schwingungen!

Ein ganz besonderes Interesse darf *die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels im Grenzfalle* $[\Theta_0] = 0$ beanspruchen. Wir wollen uns vorstellen, dafs wir der Figurenaxe in der aufrechten Anfangslage eine Reihe allmählich abnehmender Anstöfse erteilen, und wollen den Limes untersuchen, dem sich die Bahnkurve für $[\Theta_0] = 0$ nähert. Bei den allgemeinen Untersuchungen des folgenden Paragraphen wird diese Bewegung, wie wir schon jetzt bemerken, eine prinzipielle Rolle spielen.

Wir wollen uns zunächst fragen, inwieweit wir diese Bewegung durch unsere Annäherungsformeln beherrschen können. Wir bestimmen also den Fehler τ für den vorliegenden Fall und haben uns zu dem Zwecke ein Urteil über die Lage der Wurzeln e, e' und e'' zu bilden. Die kleinste Wurzel e wird durch denjenigen Parallelkreis gegeben, bis zu welchem die Kreiselspitze bei Hinzufügung eines in der Grenze verschwindenden Anstofses mindestens heruntersinkt. Dies ist nach der Fig. 54 von pag. 322 der Kreis $u = e = -1 + \frac{N^2}{2AP}$. Die nächstgröfsere Wurzel wird wegen der aufrechten Anfangslage $e' = 1$. Um die dritte Wurzel e'' zu finden, gehen wir auf den Ausdruck von U in Gleichung (5′) (vgl. pag. 318) zurück. Setzen wir hier $[\Theta_0] = 0$, so ergiebt sich

$$(13) \qquad \begin{cases} A^2 U = -N^2(1-u)^2 + 2AP(1-u)(1-u^2), \\ \qquad = 2AP(u-e)(1-u)^2. \end{cases}$$

Die dritte Wurzel wird also in diesem besonderen Falle mit der zweiten Wurzel identisch; wir haben

$$e'' = e' = 1.$$

Dann aber liefert die Ungleichung (5) wegen des verschwindenden Nenners als obere Grenze für den Fehler τ den Wert ∞! *In diesem Spezialfalle der instabilen Kreiselbewegung (aber auch nur in diesem) wird unsere angenäherte Darstellung, soweit sich dieses aus der Fehlerabschätzung beurteilen läfst, gänzlich unbrauchbar, indem die angegebene obere Grenze des Fehlers jeden beliebigen Betrag erreichen kann.*

Zum Glück wird aber auch gerade in diesem Spezialfalle die genaue

Darstellung so einfach, dafs wir unsere Näherungsformeln leicht entbehren können. Es zeigt sich nämlich, dafs die elliptischen Integrale in elementar ausführbare ausarten, entsprechend dem Umstande, dafs zwei unserer Verzweigungspunkte e' und e'' zusammenrücken. Nach Gleichung (13) wird nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}} = \sqrt{\frac{A}{2P}} \int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}};$$

das Integral rechts drückt sich durch einen Logarithmus in folgender Weise aus:

$$\int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{1}{1-e} \lg \frac{\sqrt{1-e} + \sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e} - \sqrt{u-e}}.$$

Infolgedessen wird mit Rücksicht auf den oben angegebenen Wert von e:

$$t = \frac{A}{\sqrt{4AP - N^2}} \lg \frac{\sqrt{1-e} + \sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e} - \sqrt{u-e}}. \tag{14}$$

Die Unterdrückung der Integrationskonstanten in dieser Formel kommt einer speziellen Festlegung der Anfangszeit gleich. Da die rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so bedeutet die Anfangszeit $t = 0$ denjenigen Moment, wo die Kreiselspitze den tiefsten Punkt passiert. Die Zeit wird also in Gleichung (14) (und zwar mit gutem Grunde) nicht wie bisher von dem Eintritt der Störung in der aufrechten Lage, sondern von der tiefsten Lage an gerechnet.

Dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechend wird die Ausgangsgeschwindigkeit der Kreiselspitze im Nordpole $\vartheta_0' = 0$ (wir haben ja allgemein $[\Theta] = A\vartheta'$). *In Übereinstimmung hiermit wird die Zeit, während welcher die Kreiselspitze von dem Nordpole bis zu dem Parallelkreis e herabsinkt,* und welche wir nach Früherem mit ω zu bezeichnen haben, *geradezu unendlich grofs.* In der That liefert Gleichung (14) für diese Zeit, bez. für die in umgekehrtem Sinne gemessene Zeit, während welcher u von e bis 1 wächst, den Wert

$$\omega = \infty.$$

Die explicite Darstellung der Bahnkurve verlangt ferner die Berechnung des Integrales für ψ. Wir setzen zu dem Zwecke in die allgemeine Formel

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$n = N$ und tragen den Wert von U aus Gleichung (13) ein. So ergiebt sich

$$\psi = \frac{N}{\sqrt{2AP}} \int \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Wiederum läfst sich das Integral auf elementarem Wege ausführen. Wir haben nämlich

$$\int \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\frac{du}{\sqrt{u-e}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Das erste Integral rechts wurde bereits oben angegeben; das zweite liefert

$$\int \frac{1}{1+u}\frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{2}{\sqrt{1+e}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Mithin ergiebt sich

$$(15)\qquad \psi = \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{4AP-N^2}}\lg\frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{u-e}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Da die ganze rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so giebt unsere Formel direkt an, um wieviel der Winkel ψ wächst, während die Kreiselspitze von dem unteren Parallelkreise e ausgehend in die allgemeine Lage u übergeht.

Die Gleichung (15) liefert uns die gesuchte Darstellung der Bahnkurve. Wir haben unsere Aufmerksamkeit namentlich auf den ersten Term der rechten Seite zu richten. Dieser wächst unaufhörlich, wenn u sich der 1 nähert und wird für $u = 1$ logarithmisch unendlich. Der zweite Term kommt im Verhältnis zum ersten nicht wesentlich in Frage, weil er für $u = 1$ endlich bleibt. Die Gestalt der Bahnkurve ist daraufhin klar: *Unsere Kurve windet sich um den Nordpol unaufhörlich herum, indem sie sich ihm beständig nähert, ohne ihn jemals zu erreichen.* Wir haben im Wesentlichen eine *logarithmische Spirale* vor uns.

Die ungestörte aufrechte Bewegung stellt hiernach im Falle des schwachen Kreisels, wie man im Anschlusse an Poincarés Untersuchungen zur Himmelsmechanik sagt, eine *asymptotische Lösung des Kreiselproblems* dar, weil es eine Schaar von Bewegungen giebt, welche sich ihr asymptotisch nähern.

Verfolgen wir die Bahnkurve von dem Parallelkreise e aus nach der anderen Seite, so erhalten wir einen dem soeben beschriebenen spiegelbildlich gleichen Ast, welcher gleichfalls dem Nordpole asymptotisch zustrebt. Die gesamte Bahnkurve besteht also in unserem Falle nicht, wie im allgemeinen, aus unendlich vielen, sondern nur aus zwei spiegelbildlich gleichen Teilbögen.

Trotzdem schliefst sich unsere aperiodische Spiralkurve in gewissem Sinne stetig an die periodischen Bahnkurven bei von Null verschiedenem Anstofse an. Wir haben uns vorzustellen, dafs bei abnehmendem $[\Theta_0]$ die Durchlaufungsdauer und die Spannweite jedes einzelnen der unendlich vielen Teilbögen gröfser und gröfser wird, und dafs gleichzeitig auch

die Anzahl von Malen, mit der sich der Teilbogen um den Nordpol herumschlingt, unbegrenzt zunimmt. *Nach der anderen Seite hin, d. h. nach der Seite der aufrechten Kreiselbewegung selbst, ist der Übergang von unserer spiraligen Grenzkurve zu der instabilen gleichförmigen Rotation natürlich ein völlig diskontinuierlicher.* In der That ändert sich die punktförmige Bahnkurve der aufrechten Kreiselbewegung unvermittelt sprungweise in die spiralige Grenzkurve ab, wenn wir erstere durch einen Anstofs stören und diesen Anstofs zu Null abnehmen lassen.

Hier ordnet sich auch ein spezieller Fall der gewöhnlichen Pendelbewegung ein. Wenn wir nämlich einen nicht aufgezogenen Kreisel ($N = 0$), d. i. ein Pendel, bei senkrecht über dem Unterstützungspunkte gelegenem Schwerpunkt anstofsen, so schwingt die Spitze von dem höchsten durch den tiefsten Punkt der Kugel hindurch und beschreibt einen gröfsten Kreis. Wenn wir den Anstofs immer mehr zu Null abnehmen lassen, bleibt die Bahnkurve ungeändert dieselbe. Nur die Geschwindigkeit im höchsten Punkte wird in der Grenze Null, die Schwingungsdauer unendlich. Dementsprechend liefern unsere Formeln in diesem Falle

$$e = -1, \quad \psi = \text{const.}$$

Die nächstfolgende (in orthographischer Projektion hergestellte) Figur 58 ist für die besonderen Werte

$$A = P = 1, \quad N = \sqrt{2}$$

entworfen, in welchem Falle $e = 0$ wird und die Gleichung der Bahnkurve sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\psi = \frac{1}{2} \lg \frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} + \operatorname{arctg} \sqrt{u}.$$

Bei dem kräftefreien dreiaxigen Körper ist eine entsprechende asymptotische Bewegung seit Poinsot bekannt (vgl. oben pag. 132, Anm.). Dafs aber auch der schwere symmetrische Kreisel einer solchen Bewegung fähig ist, scheint bisher eigentümlicher Weise nicht bemerkt zu sein.

Im Anschlufs an die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bringen wir einen Nachtrag zu der früheren Behandlung der *pseudoregulären Präcession*, bei welcher der Fall unerledigt blieb, wo die Bahnkurve der Kreiselspitze in nächster Nähe des Nordpols verlief. Dies nehmen wir jetzt an; es sollen also die Parallelkreise e und e' ($e < e'$) sehr wenig von einander und von 1 verschieden sein. Aufserdem sollen die für die pseudoreguläre Präcession charakteristischen Bedingungen gelten, wonach der Impuls nahezu in Richtung der Figurenaxe fallen und eine

beträchtliche Länge (N^2 grofs gegen AP) haben soll. Wir werden vermuten dürfen, dafs die Bewegung ähnlich verlaufen wird, wie die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bei hinreichend kleinem Anstofs, was wir analytisch bestätigen werden.

Da wir wieder unsere Näherungsformeln verwenden wollen, prüfen wir zunächst deren Genauigkeitsgrad. Die Formel für u giebt, wie wir wissen, eine beliebige Genauigkeit, wenn die obere Grenze des Fehlers τ

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}}-1$$

beliebig klein ausfällt. Hierzu genügt noch nicht, dafs e und e' hinreichend wenig verschieden sind, sondern es kommt noch die weitere Bedingung hinzu, dafs e'' den Werten e, e' nicht sehr nahe liegen darf. Wir müssen uns also ein Urteil über die Gröfse von e'' bilden.

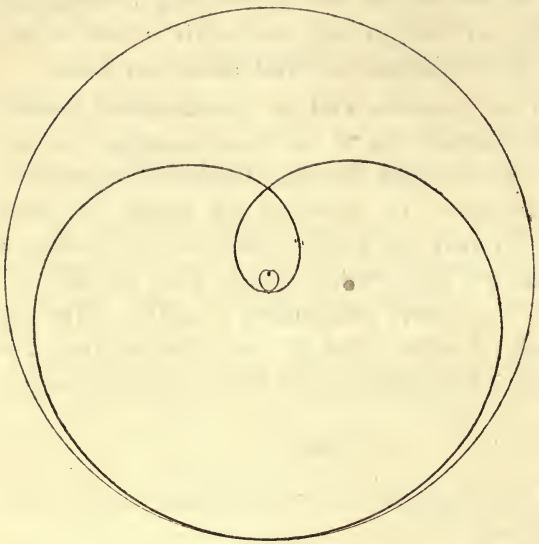


Fig. 58.

Nach Gleichung (9) von pag. 273 wird

$$e''=\frac{n^2+N^2-2nNe}{2AP(1-e^2)}-e';$$

nähert sich e immer mehr der 1, so nähern sich auch die Werte n und N einander; es verschwindet also Zähler und Nenner gleichzeitig, so dafs eine besondere Untersuchung nötig wird. Wir gehen auf den ursprünglichen Ausdruck von U (s. Gleichung (7′) von pag. 238) zurück. Tragen wir hier $u=e$ ein, so wird

$$(Ne-n)^2=(k-N^2-2APe)(1-e^2)$$

oder

$$\frac{n^2+N^2-2nNe}{1-e^2}=k-2APe.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat eine einfache mechanische Bedeutung; es war nämlich (s. Gleichung (3) von pag. 219)

$$k=|i|^2+2AP\cos\vartheta;$$

mithin ist die fragliche Gröfse direkt gleich $|i|_e^2$, d. h. gleich dem Quadrat der Länge des Impulses in der Anfangslage e. Nach Voraus-

setzung ist diese Gröfse im Verhältnis zu AP eine sehr grofse Zahl und wenig von N^2 verschieden. Hieraus folgt, dafs e'' ebenfalls einen grofsen Zahlenwert besitzt und dafs wir, gerade so wie bei der aufrechten Bewegung, näherungsweise setzen können

$$e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP}, \tag{16}$$

wobei $|i|_e^2$ durch N^2 und e' durch 1 ersetzt ist.

Die Näherungsformel (8′) von pag. 272 für u besitzt also auch in diesem Falle der pseudoregulären Präcession eine beliebig hohe Genauigkeit. Wir schreiben dementsprechend

$$\begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \dfrac{\pi t}{\omega} = u_0 + \delta, \\ u_0 = \dfrac{e' + e}{2}, \quad \varepsilon = \dfrac{e' - e}{2}, \quad \omega = \pi \sqrt{\dfrac{A^2}{N^2 - 4AP}}, \quad \delta = \varepsilon \sin \dfrac{\pi t}{\omega}. \end{cases} \tag{17}$$

Gröfsere Weiterungen verursacht die Herstellung einer geeigneten Näherungsformel für ψ. Wir haben

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}\, dt = \int \frac{n - N}{2A(1 - u)}\, dt + \int \frac{n + N}{2A(1 + u)}\, dt = \psi_1 + \psi_2.$$

Die Berechnung von ψ_2 macht keine Schwierigkeit. Benutzen wir die Identität

$$\frac{1}{1 + u} = \frac{1}{1 + u_0 + \delta} = \frac{1}{1 + u_0} - \frac{\delta}{(1 + u_0)^2} + \frac{\delta^2}{(1 + u_0)^2 (1 + u)},$$

so wird näherungsweise

$$\psi_2 = \frac{n + N}{2A(1 + u_0)}\, t + \frac{(n + N)}{2A(1 + u_0)^2} \cdot \frac{\omega \varepsilon}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi t}{\omega}. \tag{18}$$

Das fortgelassene Restglied ist, wie man sich leicht überzeugt, im Verhältnis zu den beibehaltenen Gliedern bei hinreichend kleinem ε allemal beliebig klein.

Bei der Berechnung von ψ_1 nützt uns die vorherige Entwickelung nichts, weil dabei die als klein vorausgesetzte Gröfse $1 - u_0$ in den Nenner treten und die Abschätzung des Fehlers illusorisch machen würde. Wir sind daher auf die wirkliche Ausführung der Integration angewiesen.

ψ_1 hat, wenn wir für u den Wert aus Gleichung (17) benutzen, die Form:

$$\psi_1 = c \int \frac{dt}{a - \sin \alpha t}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega}, \quad a = \frac{1 - u_0}{\varepsilon} > 1, \quad c = \frac{n - N}{2A\varepsilon}.$$

Die Integration liefert, wie man verificieren kann,

$$\psi_1 = \frac{-c}{\alpha \sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{1 - a \sin \alpha t}{\sqrt{a^2 - 1} \cos \alpha t}. \tag{19}$$

Wir werden hier also auf eine kompliciertere Abhängigkeit von t geführt, welche sich nicht, wie in der für ψ_2 gegebenen Formel, unmittelbar in ein der Zeit proportionales und ein periodisches Glied zerlegt. Auf die Fehlerabschätzung werden wir hier der Kürze halber nicht eingehen.

Zunächst wollen wir unsere letzte Formel mit der früheren Darstellung der pseudoregulären Präcession und der aufrechten Kreiselbewegung in Zusammenhang bringen. Bei der pseudoregulären Präcession mit nicht verschwindendem Präcessionskreise ist $1 - u_0$ von Null verschieden und a wegen des kleinen Nenners ε sehr grofs. Infolgedessen geht das Argument des Arcus-Tangens über in tg αt und die Formel ψ_1 in

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - 1}}\, t = \frac{n - N}{2A(1 - u_0)}\, t.$$

Dieser Term, zusammen mit dem ersten Gliede in (17), bestimmt die mittlere Präcessionsgeschwindigkeit bei der pseudoregulären Präcession in der früher (pag. 302) angegebenen Weise.

Sehen wir andrerseits zu, was Gleichung (19) bei der aufrechten Bewegung giebt, wo die Bahnkurve durch den Nordpol der Einheitskugel hindurchzieht. Hier wird $e' = 1$ und $1 - u_0 = \varepsilon$. Mithin haben wir $a = 1$. Das Argument des Arcus-Tangens nimmt in diesem Falle nur die drei Werte $+\infty$, $-\infty$ und 0 an. Im allgemeinen ist sein Wert $\pm\infty$, je nach dem Vorzeichen von cos αt; in denjenigen Momenten aber, wo $\alpha t = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ wird, d. h. (vgl. Gleichung (17)), wo die Kreiselspitze den Nordpol passiert, springt das Argument von $+\infty$ durch 0 nach $-\infty$; der Wert des Arcus-Tangens vermehrt sich dabei sprungweise um -2π. (Um dieses einzusehen, mufs man allerdings nicht den Grenzfall $a = 1$ selbst, sondern ein $a > 1$ betrachten.) In der Gleichung (7) von pag. 330, durch welche wir die ψ-Koordinate bei der aufrechten Bewegung darstellten, kam diese sprungweise Änderung nicht zum Ausdruck. Vielmehr giebt diese Gleichung nur den einen Bestandteil ψ_2 (und zwar nur das erste Glied desselben) wieder. Dagegen lehrt ein Blick auf die Figuren 55—57 die Bedeutung des in Rede stehenden Termes verstehen. Beim Passieren des Nordpols wächst ψ in der That notwendigerweise momentan und zwar um π, da sich die Bahnkurve durch den Nordpol hindurch mit stetiger Tangente fortsetzt. Gleichzeitig schliefsen wir daraus, dafs der (sonst nicht ganz leicht zu bestimmende) Grenzwert des Faktors:

$$\frac{c}{\alpha\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{(n - N)\pi}{2\pi A\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2}}$$

für $1 - u_0 = \varepsilon$ und $n = N$ gleich $\frac{1}{2}$ sein wird. Diesen Grenzwert wollen wir auch im Falle, daſs die Bahnkurve nicht genau durch den Nordpol hindurchgeht, benutzen, und für (19) einfacher schreiben:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi}{\omega} t}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi}{\omega} t}. \tag{19'}$$

Die definitiven Formeln zur Beschreibung einer pseudoregulären Präcession von sehr kleinem Präcessionskreise werden daher nach (17), (18) und (19') die folgenden:

$$\begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega}, \\ \psi = \frac{n + N}{2A(1 + u_0)} t + \frac{n + N}{2A(1 + u_0)^2} \frac{\omega \varepsilon}{\pi} \cos \frac{\pi t}{\omega} \\ \qquad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi t}{\omega}}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi t}{\omega}}. \end{cases} \tag{20}$$

Der Vergleich unserer Bewegung mit der aufrechten Kreiselbewegung giebt uns ein deutliches Bild von dem Ursprung des Termes ψ_1. Der plötzliche Sprung der ψ-Koordinate im Falle der aufrechten Bewegung muſs sich bei unserer pseudoregulären Präcession in eine stetige, aber eventuell sehr schnelle Änderung auflösen, welche jedesmal dann eintritt, wenn die Kreiselspitze dem Nordpole sehr nahe rückt. Es ist begreiflich, daſs diese ausnahmsweise Anderung des Azimuthes sich dem allgemeinen Schema von Präcession und Nutation nicht anpaſst. Dementsprechend sehen wir, daſs der allgemeine Charakter der Gleichungen zur Darstellung der pseudoregulären Präcession gegen früher erheblich verändert ist und namentlich, *daſs wir die Bewegung nicht wie früher in eine reguläre Präcession und eine einfache harmonische Schwingung auflösen können.*

Einer ähnlichen Modifikation würden natürlich auch die Gleichungen bedürfen, durch welche wir die Nachbarbewegungen der regulären Präcession dargestellt haben, falls letztere in nächster Nähe des Nordpols stattfindet. *Auch hier würde sich die Spaltung der Bewegung in eine mittlere Präcession und eine darüber gelagerte Nutation nicht mehr glatt ausführen lassen.*

Trotz des formalen Unterschiedes in der Gestalt der Gleichungen bleiben doch wesentliche Eigenschaften der allgemeinen pseudoregulären Präcession erhalten.

Wir sahen bereits, daſs sich die Zeitdauer ω eines Überganges von dem einen zu dem anderen Begrenzungskreise auch jetzt durch die Näherungsformel (17)

$$\omega = \sqrt{\frac{A^2}{N^2 - 4AP}}\,\pi,$$

darstellen läſst, welche mit Gleichung (15′) von pag. 305 identisch ist.

Ferner berechnen wir nach (20) die Gröſse $2\psi_\omega$, d. h. die Änderung des Azimuthes ψ während zweier aufeinanderfolgender Übergänge. Der Arcus-Tangens wächst während dessen um -2π, der Winkel ψ daher um

$$2\psi_\omega = \frac{n+N}{2A(1+u_0)}\,2\omega - \pi.$$

Hier gehen wir noch zur Grenze $u_0 = 1$, $n = N$ über, welche der aufrechten Bewegung entspricht und erhalten:

$$2\psi_\omega = \frac{N}{A}\,\omega - \pi.$$

Setzen wir für ω den eben angegebenen Wert ein und entwickeln diesen, indem wir von $\frac{AP}{N^2}$ wie früher bei der pseudoregulären Präcession nur die erste Potenz beibehalten, so ergiebt sich schlieſslich:

$$2\psi_\omega = \left\{\left(1 - \frac{4AP}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\}\pi = \frac{2AP}{N^2}\,\pi.$$

Dieser Wert stimmt genau mit demjenigen überein, den wir bei der gewöhnlichen pseudoregulären Präcession aus Gleichung (11) von pag. 303 berechnen würden.

Für die Anwendungen (insbesondere für die Ballistik) haben die pseudoregulären Präcessionen von sehr kleinem Präcessionskreise eine gewisse Bedeutung, weshalb ihre nachträgliche Erledigung an dieser Stelle geboten schien.

§ 6. Allgemeines über die Stabilität und Labilität der Bewegungen.

Aufgabe dieses Paragraphen soll es sein, unsere bereits mehrfach angewandte Begriffsbestimmung der stabilen und labilen Bewegungen zu verschärfen und gegen andere Definitionen dieses Begriffes abzuwägen. Das Beispiel des Kreisels wird uns dabei einen geeigneten Ausgangspunkt für allgemeinere Betrachtungen liefern.

Am frühesten kommt ein Stabilitätsbegriff bewegter Systeme in der astronomischen Mechanik vor. Er spielt bereits bei Laplace eine bekannte wichtige Rolle, der seine Scheinbeweise für die Stabilität des Planetensystems gab.*) Und zwar nennt man nach Laplace ein Punkt-

*) Vgl. z. B. Jacobis vierte Vorlesung über *Dynamik*.

system stabil, wenn im Laufe der Zeit kein Punkt sich ins Unendliche entfernen kann. Wie man sieht, ist dieser Stabilitätsbegriff speziell auf die Bedürfnisse der Astronomie und die Verhältnisse bei einem nicht starren Punktaggregate zugeschnitten. Er hat mit dem, was wir im Folgenden als Stabilität bezeichnen werden, sehr wenig zu thun.

Vom physikalischen Standpunkte aus hat wohl zuerst*) Lord Kelvin auf die Stabilitätsfragen aufmerksam gemacht. Es giebt nach ihm „kaum eine für die Naturerkenntnis wichtigere mechanische Frage wie die nach der Stabilität und Labilität der Bewegungen.“**) Seitdem werden diese Dinge von zahlreichen namentlich englischen Autoren behandelt. Die hier gewöhnlich zu Grunde gelegte Definition der Stabilität entnehmen wir der Preisschrift von Herrn E. J. Routh, *On the stability of a given state of motion.****) Nach Routh soll die Bewegung eines Systems *stabil* heifsen, *wenn bei einer beliebigen aber kleinen Störung die Abweichung zwischen den zu gleichen Zeiten Platz greifenden Lagenkoordinaten des Systems in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung dauernd klein bleibt.* (Unter einer „kleinen“ Gröfse wird dabei eine solche verstanden, „deren Quadrat vernachlässigt werden kann“.)

Wir haben zunächst das Wort „Störung“ näher zu präzisieren. Wir verstehen darunter zunächst den *Inbegriff der Differenzen zwischen den Anfangswerten der Impulskoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung.* Hierbei müssen wir uns allerdings bezüglich dessen, was bei einem beliebigen mechanischen System unter den Impulskoordinaten verstanden werden soll, auf spätere Ausführungen berufen.

Es liegt nun nahe, an der mitgeteilten Definition eine durch die Forderungen moderner Strenge gebotene Modifikation vorzunehmen. Wir werden lieber, statt von *kleinen*, von *beliebig kleinen* Störungen und Abweichungen sprechen. Damit knüpfen wir an die wohlfundierten Grundbegriffe der Differentialrechnung, speziell den Grenzbegriff, an.

Gleichzeitig sondern wir durch diese Modifikation die in unserem Beispiel von pag. 325 als *praktisch stabil* bezeichneten Fälle von den *theoretisch stabilen* ab. Bei den praktisch stabilen, theoretisch labilen Fällen der aufrechten Kreiselbewegung war nämlich die Abweichung der Kreiselspitze von ihrer Anfangslage (infolge besonderer Wahl der Konstanten A, P und N) dauernd klein; sie konnte aber nicht (durch

---

*) In der ersten Auflage der Natural Philosophy, 1867.

**) Vgl. Thomson und Tait: Natural Philosophy, art. 346, Vol. I pag. 416.

***) London 1877, vgl. Kap. I, art. 1, sowie das Lehrbuch desselben Autors, *Rigid Dynamics*, Part II, art. 256 und 257.

Verkleinerung der Störung) beliebig klein gemacht werden. Nach der vorangestellten Routhschen Definition würden diese Fälle daher zu den stabilen, nach Anbringung der vorgeschlagenen Modifikation aber zu den instabilen zu rechnen sein. Ob letzteres oder ersteres an sich vorzuziehen sei, bleibe dahin gestellt. Jedenfalls aber wird die exakte Handhabung der Stabilitätsdefinition durch die Forderung *beliebiger* Kleinheit von Störung und Abweichung, d. h. durch die Beschränkung auf *theoretische* Stabilität, erleichtert. Auf die Behandlung der praktisch stabilen, theoretisch labilen Fälle behalten wir uns vor, am Schlusse des Paragraphen zurückzukommen.

Wir erwähnen sogleich noch eine zweite Modifikation, welche wir vorschlagen möchten. Die obige Definition verlangt, dafs die Abweichungen zwischen den Lagen-*Koordinaten* des Systems klein seien (bez. beliebig klein gemacht werden können). Die Auswahl des Koordinatensystems aber ist, zumal vom Standpunkte der allgemeinen Lagrangeschen Mechanik, ganz in unsere Willkür gegeben. Es ist sehr wohl möglich, dafs die Abweichungen zwischen den Lagenkoordinaten bei einer gewissen Wahl des Koordinatensystems im Verlaufe der Bewegung beliebig klein bleiben, bei einer anderen beliebig grofs werden — sofern wir nicht die Wahl des Koordinatensystems gewissen Beschränkungen unterwerfen, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen können. *In der obigen Fassung betrifft also die Stabilitätsdefinition genau genommen eine mechanisch gegenstandslose Eigenschaft der Bewegung, welche vom Koordinatensystem nicht unabhängig ist.*

Es ist leicht diesen Übelstand zu beseitigen. Wir müssen nicht von den *Abweichungen der Lagenkoordinaten*, sondern von den *Abweichungen der Lagen des Systems* sprechen. Diese nennen wir beliebig klein, wenn die Entfernungen der Orte jedes einzelnen Systempunktes bei der einen und bei der anderen Bewegung in entsprechenden Zeitmomenten beliebig klein sind. Die Entfernung zweier Punkte aber ist ein von der Koordinatenauswahl unabhängiger Begriff.

Um auch bei der Gröfsenabschätzung der Störung vom Koordinatensystem unabhängig zu sein, können wir uns den Gesamtimpuls des Systems in die zu jedem einzelnen Massenpunkte gehörigen Einzelimpulse aufgelöst denken, welche jederzeit aus Masse und Geschwindigkeit des Punktes bestimmt werden können. Die Störung wird alsdann beliebig klein heifsen, wenn die Abweichungen zwischen den zu jedem Systempunkte gehörigen Einzelimpulsen im Anfange der ursprünglichen und der gestörten Bewegung unterhalb einer beliebig vorzuschreibenden Grenze liegen.

Daraufhin werden wir die Routhsche Definition der Stabilität

folgendermafsen präzisieren können: *Eine Bewegung heifse stabil, wenn die aus einer Störung resultierenden Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems dadurch dauernd unter eine gegebene Grenze herabgedrückt werden können, dafs man die Gröfse der Störung unterhalb einer geeignet zu bestimmenden Grenze wählt.*

Wir wollen diese Definition eingehend auf ihre Zweckmäfsigkeit prüfen.

Vom rein logischen Standpunkte aus ist natürlich jede Definition zulässig, welche nicht mit sich selbst im Widerspruch ist und der überhaupt irgendein Objekt in der Wirklichkeit entspricht. Vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus aber müssen wir von einer Stabilitätsdefinition mehr verlangen als ihre blofse innere oder äufsere Widerspruchslosigkeit. Allgemein verbindet man nämlich mit dem Worte „instabil" die Auffassung eines ausnahmsweisen und turbulenten Vorganges. Wir werden daher, um dieser Auffassung gerecht zu werden, von unserer Definition verlangen müssen, dafs keine durchaus reguläre und gewöhnliche Bewegung unter den Begriff der instabilen, keine augenscheinlich irreguläre unter den der stabilen Vorgänge falle.

Es soll nun an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, dafs unter diesem Gesichtspunkte die obige Definition der Stabilität ungeeignet ist. Die betreffenden Beispiele entnehmen wir zum Teil der Theorie des Kreisels, zum Teil den einfachsten Problemen der Punktmechanik.

Betrachten wir zunächst die reguläre Präcession und die benachbarten Bewegungen, wie im § 1 dieses Kapitels. Hier konstatieren wir aus dem Anblick der Fig. 47, dafs die abgeänderte Bahnkurve dauernd in der Nähe der ursprünglichen verläuft; und zwar gilt dieser Sachverhalt für jede beliebige Art der Störung.

Anders liegt die Sache, wenn wir nicht nur die räumliche Gestalt der Bahnkurve, sondern auch, wie es die obige Stabilitätsdefinition verlangt, das Tempo berücksichtigen, in welchem sie von der Kreiselspitze durchlaufen wird. Wir sahen pag. 287, dafs bei der abgeänderten Bewegung die mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)}$$

von der Präcessionsgeschwindigkeit

$$\frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}$$

bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen, d. h. immer dann, wenn der Anstofs nicht gerade die Knotenlinie zur Axe hat, verschieden ist, allerdings um so weniger, je kleiner wir den Anstofs wählen. Diese

Verschiedenheit genügt aber, um im Laufe der Zeit eine endliche Differenz zwischen der Lage der Kreiselspitze in den beiden verglichenen Fällen der Bewegung herbeizuführen Wir können direkt ein (mit abnehmender Störung natürlich wachsendes) Zeitintervall t bestimmen, nach dessen Ablauf die Differenz der ψ-Werte bei unseren beiden Bewegungen beispielsweise gröfser als $\frac{\pi}{2}$ wird.

Wollten wir dieses vermeiden, so müfsten wir den Charakter der Störung der besonderen Bedingung unterwerfen, dafs lediglich die $[\Theta]$-Komponente des Impulses bei der Störung alteriert wird. Das wäre aber eine willkürliche Festsetzung, welche in der bisherigen Definition nicht vorgesehen ist.*) Überdies würde auch dann noch die abgeänderte Präcessionsgeschwindigkeit mit der ursprünglichen (vgl. pag. 320) nur bis auf Gröfsen übereinstimmen, welche der zweiten Potenz der Störung $[\Theta_0]$ proportional sind. Bei entsprechender Vergröfserung des Zeitintervalles t können wir auch in diesem Falle eine beliebige endliche Differenz in den gleichzeitigen Werten der ψ-Koordinate bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung konstatieren.

Hiernach ist klar, dafs nach dem Wortlaut unserer obigen Definition die allereinfachste Bewegung des Kreisels, die reguläre Präcession, als instabil zu bezeichnen wäre.

Entsprechendes gilt in erhöhtem Mafse von den allgemeinen Bewegungen des Kreisels. Hier bleibt bei einem hinreichend kleinen Anstofse nicht einmal die Bahnkurve der Kreiselspitze ihrer Gestalt nach dauernd in beliebiger Nähe der ursprünglichen. In der That ändert sich bei einer Abänderung des Impulses im allgemeinen (vgl. die Figuren 29—35 des vorigen Kapitels) auch die Spannweite der Teilbögen, sowie die Zeit, in welcher letztere durchlaufen werden. Allerdings können diese Änderungen beliebig klein gemacht werden, wenn wir die Impulsänderung hinreichend klein wählen. Wenn wir aber nur einen genügend grofsen Zeitraum in Betracht ziehen, entstehen aus solchen beliebig kleinen Anderungen beliebige endliche Differenzen zwischen entsprechenden Lagen der Kreiselspitze. *Wollten wir also an der obigen Definition festhalten, so müfsten wir die sämtlichen Bewegungen des Kreisels schlechtweg für instabil erklären.* Dies trifft insbesondere auch für die aufrechte Bewegung des starken Kreisels zu, wenn wir die Koordinate χ berücksichtigen und eine Abänderung der Impulskomponente N zulassen oder ganz allgemein dann, wenn wir auch

*) In Wirklichkeit wird eine solche Festsetzung bei den englischen Autoren allerdings meist nachträglich eingeführt. Vgl. den folgenden Paragraphen.

solche Abweichungen mit in Rechnung setzen, welche der zweiten Potenz der Störung proportional sind (vgl. pag. 320).

Um auch noch ein Beispiel aus der Mechanik des einzelnen Massenpunktes zu nennen, betrachten wir mit Herrn Appell*) die kreisförmige Bewegung eines Massenpunktes in einer festen Ebene unter dem Einflusse einer anziehenden Centralkraft von dem Wirkungsgesetze r^n. Es zeigt sich, dafs bei einer Störung die abgeänderte Bahnkurve *dauernd* dem ursprünglichen Kreise bei hinreichend kleinem Anstofs beliebig nahe bleibt, falls $n > -3$ ist. Anders die Lage des Punktes auf der Bahnkurve. Diese wird offenbar nur dann für die Dauer der Bewegung wenig geändert werden, wenn der Zusatzstofs keine Komponente in Richtung der ursprünglichen Bahn hat, wenn also der Zusatzstofs die Geschwindigkeit des Punktes ungeändert läfst. Hr. Appell sieht sich daher auf Grund der obigen Definition genötigt, die Bewegung des Punktes auch im Falle $n > -3$ für instabil zu erklären.

Die genannten Mifsstände kann man teilweise vermeiden, wenn man prinzipiell nur solche Impulsänderungen zuläfst, welche die Energie des Systems nicht verändern. In dem Werke von Thomson und Tait wird eine derartige Störung als „konservativ" bezeichnet, und die Beschränkung auf konservative Störungen sogleich in die Stabilitätsdefinition aufgenommen.**) Bei dieser Modifikation des Stabilitätsbegriffes wird in dem zuletzt genannten Beispiele die kreisförmige Bahn im Falle $n > -3$ für stabil zu erklären sein***); überhaupt wird so das Auftreten „säkularer Störungen", wie man die mit der Zeit wachsenden Abweichungen der abgeänderten von der ursprünglichen Lage nennen kann, in vielen Fällen vermieden (wenigstens insoweit, dafs diese säkularen Glieder nur noch von der Gröfsenordnung der zweiten Potenz der Impulsänderung sind).

Es bleiben aber noch genug andere Übelstände bestehen. Betrachten wir z. B. die kräftefreie Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Werden wir uns entschliefsen können, diese sozusagen regulärste aller Bewegungen für instabil zu erklären? Nach dem Wortlaute der üblichen Definition müfsten wir es thun. Denn die durch einen Zusatzstofs abgeänderte Bewegung des Punktes, welche beim Fehlen äufserer Kräfte wieder eine gleichförmige und geradlinige ist, entfernt sich von der ursprünglichen Bahn mehr und mehr, wie klein wir auch die Störung bemessen mögen.

---

*) Mécanique rationelle, t. II, art. 458.

**) Natural Philosophy, art. 346, 347.

***) Natural Philosophy, art. 350.

Wir ziehen ferner das interessante Beispiel der geodätischen Linien heran, d. h. der kräftefreien Bahnen eines einzelnen Massenpunktes, welcher gezwungen wird, auf einer irgendwie gekrümmten Fläche zu bleiben. Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Krümmung der Fläche (im Gaussischen Sinne) positiv oder negativ ist. Lassen wir unsern Massenpunkt auf einer Fläche von negativer Krümmung laufen (z. B. auf einem einschaligen Hyperboloid) und erteilen ihm einen kleinen Stofs, so entfernt sich die so gestörte Bahn von der ursprünglichen immer mehr; wir können keine Grenze angeben, unterhalb deren die Gröfse des Stofses liegen müfste, damit die Entfernung des Punktes bei der abgeänderten Bewegung von der entsprechenden Lage bei der ursprünglichen Bewegung unter einer vorgegebenen Grenze bleibe. Hiernach müfsten wir alle geodätischen Bahnen auf Flächen negativer Krümmung mit Thomson und Tait*) als instabile Bahnen bezeichnen. Auf den Flächen von positiver Krümmung andrerseits sind geodätische Bahnen, welche im Sinne der obigen Definition stabil zu nennen sind, jedenfalls denkbar. Man zeigt nämlich, dafs, wenn man auf einer solchen Fläche von irgend einem Punkte aus zwei geodätische Linien konstruiert, welche sich in ihrer Anfangsrichtung unendlich wenig unterscheiden, diese sich fortgesetzt schneiden müssen, in Intervallen, die je nach der Gröfse des Krümmungsmafses verschieden sind. Betrachten wir also eine dieser beiden Linien als die ursprüngliche Bahn unseres Massenpunktes, die andere als die durch eine Störung abgeänderte, so wird die erstere beständig um die letztere *herumoscillieren*. Können wir ferner nachweisen, dafs die Amplitude der Oscillationen mit wachsender Zeit nicht systematisch zunimmt, so werden wir bei Beschränkung auf konservative Störungen die Bahnkurve auch nach der obigen Definition für stabil erklären können.**)

Alles in allem werden wir aber sagen müssen: *Die obige Stabilitätsdefinition, nach welcher eine dauernde Kleinheit der Abweichungen verlangt wird, ist zu eng. Sie verweist unter anderem die allereinfachsten*

*) l. c. art. 355, wo man auch die äufserst einfachen Beweise der im Text genannten Sätze über geodätische Linien nachlesen wolle.

**) Thomson und Tait, l. c., art. 355. Der Schlufs auf die (im Sinne der Autoren gemeinte) Stabilität der Bahnkurve ohne vorherige Untersuchung der Oscillationsamplitude scheint allerdings voreilig. In der That sind z. B. auf dem Rotationsellipsoid die Meridiane im Thomsonschen Sinne instabile Bahnen: Bei Hinzufügung eines seitlichen Anstofses gehen sie in ungeschlossene Kurven über, welche abwechselnd einen in der Nähe des Nordpols und einen in der Nähe des Südpols gelegenen Parallelkreis berühren und das Ellipsoid mit einer von 2π verschiedenen Spannweite umschlingen. Verfolgen wir eine solche Kurve weit genug, so entfernt sie sich von dem ursprünglichen Meridiane mehr und mehr.

und regulärsten Bewegungen (Galileische Trägheitsbewegung!) in die Klasse der instabilen Bewegungen, was der natürlichen Auffassung des Wortes widerspricht.

Man könnte versuchen, die obige Definition im wesentlichen beizubehalten und sie nur darin abzuändern, dafs man die Kleinheit der Abweichungen nicht für jeden beliebigen, sondern für einen begrenzten Zeitraum fordert. Man würde dann die Stabilität durch folgendes Postulat definieren:

Es soll möglich sein, die Störung so klein zu wählen, dafs für einen gegebenen Zeitraum $t < T$ die Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung unterhalb einer vorgegebenen Grenze bleiben.

Auf Grund dieser Definition würde die Galileische Trägheitsbewegung, die geodätischen Bahnen auf dem Hyperboloid, die allgemeine Kreiselbewegung u. s. w. sofort in die Kategorie der stabilen Bahnen einrücken. Es würden sich aber Übelstände anderer Art ergeben. Es würden nämlich Bewegungen von so zweifellos irregulärem Charakter wie die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels für stabil erklärt werden müssen.

Rufen wir uns zunächst das Verhalten des schwachen Kreisels im Grenzfalle eines unendlich abnehmenden Anstofses ($\lim [\Theta_0] = 0$) ins Gedächtnis zurück. Unsere frühere Untersuchung zeigte, dafs die Kreiselspitze in diesem Grenzfalle allerdings nicht in beliebiger Nähe des Nordpols bleibt, dafs aber ihre Geschwindigkeit im Nordpole selbst gleich Null ist. Und zwar wurde die Zeit ω, während welcher die Kreiselspitze in Fig. 58 von einem beliebigen Punkte der Spirale bis in den Nordpol gelangt, unendlich grofs.

Hiernach übersieht man das Verhalten der Kreiselspitze bei einem von Null verschiedenen aber aufserordentlich kleinen Anstofse $[\Theta_0]$.

Die Bahnkurve ist dann keine Spirale, aber sie wird den Nordpol immerhin noch einige Male in nächster Nähe umkreisen; die Geschwindigkeit ϑ', mit welcher sie aus dem Nordpole herausrückt, ist nicht gleich Null, aber immerhin aufserordentlich klein.

Sicherlich können wir nun für den Anstofs $[\Theta_0]$ eine obere Grenze so festsetzen, dafs bei jedem kleineren Anstofse für jede Zeit $t < T$ (T etwa gleich einem Jahre) die Abweichung der Lagenkoordinate ϑ in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung kleiner als ε (ε etwa gleich einer Bogensekunde) wird.

Mit anderen Worten: *Die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels wäre bei Zugrundelegung unserer jetzigen Definition stabil!*

Ähnliche Betrachtungen liefsen sich in dem gleichfalls allgemein

als instabil anerkannten Falle der Rotation des unsymmetrischen schwerelosen Kreisels um seine mittlere Hauptträgheitsaxe anstellen. Auch hier wird die Geschwindigkeit, mit der die Rotationsaxe bei einem zu Null abnehmenden Anstofse die mittlere Hauptträgheitsaxe verläfst, in der Grenze gleich Null. Für eine begrenzte Zeit $t < T$ bleibt daher die abgeänderte Bewegung bei geeigneter Wahl des Anstofses auch hier in beliebiger Nähe der ursprünglichen.

Wir schliefsen hieraus: *Unsere jetzige Stabilitätsdefinition, nach welcher die Kleinheit der Abweichung nur für einen begrenzten Zeitraum verlangt wird, ist zu weit. Sie läfst Bewegungen als stabil passieren, die wir vernünftiger Weise durchaus als labil ansehen müssen.*

Wir sind somit in ein eigentümliches Dilemma geraten, dem wir nur dadurch entgehen können, dafs wir unsere früher bereits mehrfach in Anwendung gebrachte Stabilitätsdefinition wieder aufnehmen. Wir wollten eine Bewegung stabil nennen, wenn zwischen ihr und der durch einen beliebigen Anstofs abgeänderten Bewegung ein *stetiger Übergang* möglich ist. Es kommt nur darauf an, diesen etwas unbestimmt gehaltenen Stetigkeitsbegriff näher zu präzisieren und durch ein analytisches Kriterium zu kennzeichnen. Wir wollen zu dem Zwecke folgendermafsen verfahren: Wir ändern die fragliche Bewegung durch einen endlichen Anstofs von beliebigem Charakter ab. Alsdann lassen wir die Gröfse des Anstofses zu Null abnehmen und suchen die Grenze auf, der die abgeänderte Bewegung hierbei zustrebt. *Wenn diese Grenze existiert und mit der vorgelegten Bewegung übereinstimmt, nennen wir den Übergang zwischen der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung einen stetigen.*

Unsere endgültige Stabilitätsdefinition, ausgesprochen für ein beliebiges mechanisches System, wird daraufhin folgendermafsen lauten:

Eine Bewegung soll stabil heifsen, wenn sie übereinstimmt mit dem Limes, welchem die aus einer beliebigen Impuls-Änderung resultierende Bewegung bei nach Null abnehmender Gröfse dieser Änderung zustrebt. Dagegen soll sie labil genannt werden, wenn sie von dem so erhaltenen Limes verschieden ist, oder wenn bei verschiedenen Arten der Impulsänderung verschiedene Limites herauskommen oder wenn ein Limes überhaupt nicht existiert.

Offenbar wird nach dieser Definition beispielsweise die reguläre Präcession, die allgemeine Bewegung des Kreisels, bei welcher die Bahnkurve zwischen zwei Parallelkreisen hin und her läuft, die Galileische Trägheitsbahn u. s. w. zu den stabilen Bewegungen, die aufrechte Bewegung des schwachen Kreisels, die Rotation des dreiaxigen Körpers um die mittlere Hauptträgheitsaxe u. s. w., wie billig, zu den labilen

Bewegungen zu rechnen sein. In der That sahen wir z. B. bei dem aufrechten schwachen Kreisel, dafs bei zu Null abnehmendem Werte des Anstofses $[\Theta_0]$ eine ganz bestimmte Bewegung (von spiraliger Bahnkurve) übrig blieb, welche von der einfachen Rotation um die Vertikale verschieden war. Was die geodätischen Bahnen auf dem Rotationshyperboloid betrifft, so würden diese im allgemeinen stabil sein mit Ausnahme des Kehlkreises, welcher instabil ist und eine asymptotische Lösung darstellt, wie wir nicht näher ausführen wollen.

Ein weiterer Punkt, in dem unsere Stabilitätsdefinition der sonst üblichen ersichtlich überlegen ist, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Wenn man die Stabilität der Bewegungen im gewöhnlichen Sinne aus der Kleinheit der Abweichung beurteilt, welche aus einer kleinen Störung resultiert, und wenn man diese Abweichung durch Näherungsformeln darstellt, so vernachlässigt man (vgl. pag. 320) gewöhnlich alle diejenigen Glieder, welche wie die zweite oder eine höhere Potenz der Störung verschwinden. Ist die betreffende Vernachlässigung aber in einem säkularen (etwa mit t multiplizierten) Terme vorgenommen, so wächst die hierdurch bedingte Ungenauigkeit der Näherungsformel mit der Zeit immer mehr an; während also die Näherungsformel auf eine dauernd kleine Abweichung schliefsen läfst, kann es vorkommen, dafs in Wirklichkeit die Abweichung zwischen der gestörten und der ursprünglichen Bewegung jeden beliebigen Betrag erreicht. In diesem Falle würde eine Bewegung nach der gewöhnlichen Methode stabil erscheinen, während doch bei einer Störung mit der Zeit endliche Abweichungen auftreten. Dagegen ist die Handhabung unserer definitiven Stabilitätsdefinition von solchen Schwierigkeiten gänzlich frei. Bei uns handelt es sich nicht um Abweichungen erster oder zweiter Ordnung, sondern um direkte *Gleichheit* zwischen der ursprünglichen und dem Limes der gestörten Bewegung. Diese Gleichheit läfst sich aber nicht nur mit gröfserer Schärfe, sondern auch mit gröfserer Leichtigkeit beurteilen, wie die Kleinheit der Abweichung bei der gewöhnlichen Definition.

Wir können unsere neue Definition auch dadurch empfehlen, dafs wir zeigen: *Im Falle des Gleichgewichts, wo die Begriffe stabil und labil seit langem feststehen, deckt sie sich mit der allgemein acceptierten Bedeutung dieser Worte.* Es genüge in der Hinsicht ein einfaches Beispiel. Ein schwerer Massenpunkt auf der Kugeloberfläche befindet sich im obersten Punkte (Nordpol) im labilen, im untersten (Südpol) im stabilen Gleichgewicht. Dies folgt aus unserer Definition der Stabilitätsverhältnisse der Bewegung, von denen die der Ruhe ein spezieller Fall sind, und stimmt mit der gewöhnlichen Auffassung überein. Geben

wir nämlich dem im Nordpole befindlichen Punkte einen Stofs, so beschreibt er einen gröfsten Kreis auf der Kugel; lassen wir die Gröfse des Stofses immer mehr zu Null abnehmen, so bleibt die Bahn des Punktes die frühere, nur die Geschwindigkeit nimmt ab; im Nordpole wird sie in der Grenze gleich Null, in allen übrigen Punkten des gröfsten Kreises bleibt sie von Null verschieden. Der Limes ist hier also eine bestimmte wohldefinierte Bewegung, welche von dem ursprünglichen Ruhezustande verschieden ist. Übrigens ergiebt sich je nach der Richtung des Anstofses ein anderer Limes. Lassen wir dagegen auf den im Südpole ruhenden Punkt einen Anstofs wirken, so pendelt der Punkt auf einem gröfsten Kreise hin und her, wobei die Gröfse des Ausschlages von der Gröfse des Anstofses abhängt und mit diesem zu Null abnimmt. Der Limes, von dem unsere Definition spricht, ist hier also die ursprüngliche Ruhelage selbst.

Wir könnten schliefslich noch einen auf der Kugel ruhenden *schwerelosen* Massenpunkt betrachten. Stofsen wir diesen an, so beschreibt er einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit; lassen wir die Gröfse des Stofses Null werden, so wird auch die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich Null. Man könnte im Zweifel sein, ob man den so erhaltenen Limes als Ruhe oder als Bewegung bezeichnen soll. Jedenfalls wird man sagen müssen, dafs ein bestimmter Limes nicht existiert, da die Lage des gröfsten Kreises von der Richtung des Anstofses abhängt. Für solche Fälle scheint die wohl auch sonst angewandte Bezeichnung des „indifferenten Gleichgewichtes“ passend.

Wir wollen keineswegs leugnen, dafs nicht auch der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Stabilitätsbegriff, zumal wenn er durch die Einschränkung auf konservative Anstöfse verbessert ist, der Untersuchung würdig wäre. Wir möchten nur in dem dort definierten Falle nicht von Stabilität schlechtweg, sondern etwa von *absoluter Stabilität* sprechen. Also:

Wenn eine Bewegung so beschaffen ist, dafs sie bei einer hinreichend kleinen konservativen Änderung der Impulskoordinaten in eine Bewegung übergeht, in welcher die Lagen des Systems den entsprechenden Lagen in der ursprünglichen Bewegung dauernd beliebig nahe bleiben, so nennen wir die Bewegung absolut stabil. Dafs eine solche Bewegung auch unserer definitiven Stabilitätserklärung genügt, ist selbstverständlich. Die pag. 347 genannte Kreisbahn ist unter der angegebenen Bedingung $n > -3$ in diesem Sinne absolut stabil. Dabei müssen wir allerdings wiederholt bemerken, dafs die in der Litteratur (z. B. bei Routh sowie bei Thomson und Tait) gewöhnlich eingeschlagene Untersuchungsmethode, nach welcher die absolute Stabilität ans den Gliedern erster Ordnung unter

Vernachlässigung der höheren Glieder erschlossen wird, von unserem Standpunkte aus unvollständig ist. Nach der vorstehenden Definition können wir eine Bewegung nur dann absolut stabil nennen, wenn die abgeänderte Bewegung nicht nur in den Gliedern erster Ordnung, sondern schlechtweg der ursprünglichen dauernd beliebig benachbart bleibt.

Wir können noch eine Reihe anderer Unterscheidungen treffen. Wenn wir den Ton darauf legen wollen, dafs bei Abänderung einer stabilen Bewegung das System nach gewissen Zeitintervallen in dieselben Lagen kommt, wie bei der ursprünglichen, so können wir die Bewegung *oscillierend stabil* nennen. Der Gegensatz hiervon wäre *divergierend stabil.* Die geodätischen Bahnen auf den Flächen positiver Krümmung sind, soweit sie überhaupt stabil sind, allemal oscillierend, die auf den negativ gekrümmten Flächen divergierend stabil. Die Galileische Trägheitsbahn liefert ein weiteres Beispiel von divergierender Stabilität. Dafs absolute und oscillierende Stabilität nicht zusammenzufallen brauchen, kann an dem Beispiel der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid gezeigt werden (vgl. die Anm. auf pag. 348).

Ferner können wir noch unterscheiden zwischen *partieller* und *totaler Stabilität.* Von partieller Stabilität würden wir sprechen, wenn unser Stabilitätskriterium nur für gewisse Anstöfse, von totaler dann, wenn es schlechtweg, d. h. für alle möglichen Anstöfse erfüllt ist. Unsere bisherige Stabilitätsdefinition bezog sich hiernach auf totale Stabilität. Beschränken wir uns dagegen mit Thomson und Tait auf konservative Anstöfse, so fragen wir nach einer Art partieller Stabilität. Auch sonst interessiert man sich in der Litteratur, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, zumal im Falle der sogenannten cyklischen Systeme, meist nur für partielle Stabilität.

Endlich wollen wir noch einmal den Gegensatz zwischen *theoretischer und praktischer Stabilität und Labilität* betonen. Unsere bisherigen Entwickelungen in diesem Paragraphen bezogen sich sämtlich auf theoretische Stabilität. Es kann aber, wie wir schon im vorigen Paragraphen sahen, vorkommen, dafs eine Bewegung unserem Stabilitätskriterium nicht genügt, dafs sie aber doch für praktische Zwecke so gut wie stabil ist. Dies wird eintreten, wenn der in Frage kommende Limes von der ursprünglichen Bewegung zwar verschieden, aber nur so wenig verschieden ist, dafs er nahezu mit jener zusammenfällt.

Das Umgekehrte wird der Fall sein, wenn der Limes der abgeänderten Bewegung allerdings mit der ursprünglichen identisch ist, wenn aber selbst kurz vor dem Grenzübergange, d. h. bei schon sehr klein gewordenen Werten der Impulskoordinatenänderungen die abgeänderte Bewegung noch wesentlich von der ungestörten differiert. Ein

Beispiel für ein in diesem Sinne *praktisch labiles, theoretisch stabiles Gleichgewicht* liefert ein Massenpunkt, der sich reibungslos in einer sehr kleinen Mulde auf der Spitze eines Berges befindet. Ein *theoretisch labiles und praktisch stabiles Gleichgewicht* stellt ein Punkt dar, der auf einer geringfügigen Erhöhung im Boden eines Thales liegt.

Wir wollen zum Schlusse bemerken, dafs man unsere Stabilitätsdefinition, wenn man will, in der Weise modifizieren könnte, dafs man aufser den Impuls- auch die Lagenkoordinaten bez. dafs man statt der Impuls- die Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten des Systems einer kleinen Änderung unterzieht, wie solches bei den Gleichgewichtsuntersuchungen in der That häufig geschieht. Indessen scheint diese Modifikation keine erheblichen Konsequenzen zu haben. Überdies dürfte unsere Abänderung der Impulskoordinaten am besten dem physikalischen Begriffe einer Störung entsprechen und dürfte den Vorzug verdienen vor einer Abänderung der Geschwindigkeitskoordinaten, welche zwar formal-mathematisch jener gleichwertig aber ihrem physikalischen Sinne nach weniger zweckentsprechend sein würde wie jene.

§ 7. Energiekriterien für die Stabilität des Gleichgewichtes und der Bewegung.

Die Handhabung unserer Stabilitätsdefinition des vorigen Paragraphen setzt die Kenntnis der Bahnkurven im allgemeinen und namentlich die Kenntnis desjenigen Limes voraus, dem die Bewegung bei verschwindender Störung zustrebt. Die Entscheidung, ob eine Bewegung stabil oder labil sei, ist hiernach ziemlich mühevoll. Man wird wünschen, diese Entscheidung zu vereinfachen und wird namentlich nach Kriterien suchen, welche ohne Kenntnis der allgemeinen Bewegung, also ohne Integration der mechanischen Differentialgleichungen, zum Ziele führen. Wir werden in dieser Hinsicht kaum etwas Neues zu bringen haben; unsere Aufgabe soll vielmehr wesentlich kritischer Natur sein. Wir beabsichtigen namentlich im folgenden Paragraphen zu zeigen, dafs das gangbarste Kriterium, welches aus der sogenannten Methode der kleinen Schwingungen folgt, zu mancherlei Einwänden Anlafs giebt.

Als Vorbild für die zunächst anzustellende Untersuchung mufs das bekannte *Kriterium für die Stabilität des Gleichgewichtes* dienen, welches von Lagrange zuerst ausgesprochen und von Dirichlet in einer kurzen aber bedeutungsvollen Arbeit*) genau formuliert und bewiesen ist. Dirichlet betrachtet ein beliebiges mechanisches System, dessen Ver-

*) Crelles Journal, Bd. 32, pag. 85—88, 1846.

bindungen von der Zeit unabhängig sind, und welches lediglich „konservativen Kräften“ unterworfen ist, d. h. solchen Kräften, deren Arbeit durch eine Funktion der Koordinaten, den negativ genommenen Wert der potentiellen Energie V, dargestellt werden kann. Für ein solches System gilt der Satz der lebendigen Kraft in der Form

$$T + V = h.$$

Das Resultat der Dirichletschen Untersuchung lautet nun bekanntlich so: *Das Gleichgewicht ist sicher stabil, wenn in der fraglichen Gleichgewichtslage V ein wirkliches Minimum ist.*

Den Beweis führen wir mit Rücksicht auf die sogleich zu nennende Verallgemeinerung des Kriteriums etwas abweichend von Dirichlet folgendermafsen:

In der Gleichgewichtslage ist $T = 0$; der Wert von V kann, da er nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, ebenfalls gleich Null gesetzt werden; also wird in der Gleichgewichtslage auch $h = 0$. Ist nun V ein wirkliches Minimum, so können wir solche Grenzen für die die Lage des Systems bestimmenden Koordinaten angeben, dafs V gröfser als eine (genügend klein zu wählende) positive Gröfse k ausfällt, sobald eine oder mehrere der Lagenkoordinaten einem oder mehreren der genannten Grenzwerte gleich werden, und gleichzeitig die Werte der übrigen Lagenkoordinaten innerhalb dieser Grenzen verbleiben. Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir von der Gesamtheit der Wertsysteme unserer Lagenkoordinaten, welche innerhalb der genannten Grenzen liegen, als von einem „Gebiet“ sprechen und wollen diejenigen Koordinaten-Wertsysteme, in denen mindestens eine Koordinate mit einem der für diese Koordinate aufgestellten Grenzwerte übereinstimmt, als „Begrenzung des Gebietes“ bezeichnen. Dann haben wir auf der Begrenzung unseres Gebietes

$$V > k.$$

Um so mehr wird also, weil T notwendig positiv ist,

$$T + V > k, \tag{1}$$

und zwar unabhängig von den Werten, die wir den in T eingehenden Geschwindigkeitskoordinaten beilegen mögen.

Wir erteilen nun dem System eine Störung. Für die so entstehende Bewegung gilt wieder der Satz der lebendigen Kraft. Die Störung können wir so klein bemessen, dafs die Konstante der lebendigen Kraft $h < k$ wird. Für die gestörte Bewegung gilt also

$$T + V < k. \tag{2}$$

Es ist nun klar, dafs diese Bewegung ganz und dauernd innerhalb des vorher angegebenen Gebietes verläuft. Im entgegengesetzten Falle

würde es nämlich einmal eintreten, dafs eine Lagenkoordinate (oder eventuell mehrere gleichzeitig) die oben angegebenen Grenzen erreichte, während die übrigen Lagenkoordinaten noch solche Werte besäfsen, die dem Innern des Gebietes angehörten. In diesem Augenblicke müfste aber die Ungleichung (1) gelten, welche mit der gleichzeitig geltenden Ungleichung (2) unvereinbar ist.

Die Grenzen des Gebietes können nun beliebig verengert und die vorstehenden Schlüsse, bei entsprechender Verkleinerung der Störung, wiederholt werden.

Hiernach bleibt das System bei der abgeänderten Bewegung dauernd in einer beliebig engen Nachbarschaft der ursprünglichen Gleichgewichtslage. Letztere ist also nach unserer sowie nach jeder sonstigen Definition des Wortes sicher stabil.

Das somit bewiesene Kriterium *reicht* hiernach *hin*, um die Stabilität des Gleichgewichtes zu garantieren. Es entsteht aber weiter die Frage, ob die Forderung dieses Kriteriums auch *notwendig* ist, oder anders ausgedrückt, ob sich der Lagrange-Dirichletsche Satz in dem Sinne umkehren läfst, dafs beim Nichtvorhandensein eines Minimums (oder vielleicht nur beim Vorhandensein eines Maximums) das Gleichgewicht sicher instabil ist. Hierüber giebt es noch keine abschliefsenden Resultate. Wenigstens können die Herren Liapounoff und Hadamard in ihren einschlägigen Arbeiten*) die Umkehrung des in Rede stehenden Satzes nur unter spezielleren Voraussetzungen über die Beschaffenheit von V aussprechen (z. B. unter der Voraussetzung, dafs sich in der Potenzentwicklung von V das Nichtvorhandensein eines Minimums an den quadratischen Gliedern oder das Vorhandensein eines Maximums an den Gliedern niedrigster Ordnung erkennen läfst).

Wir kommen nun zu einer interessanten Übertragung des vorhergehenden „Energiekriteriums“ („energy test of stability“) von dem Falle des Gleichgewichtes auf den der Bewegung. Diese Übertragung ist von Routh**) geleistet worden.

Wir gehen mit Routh ebenso wie bei dem Gleichgewichtskriterium (unter den oben angegebenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Verbindungen des Systems und der auf das System wirkenden Kräfte) von dem Energieausdrucke

---

*) Vgl. Liapounoff, Journal de Liouville, sér. V, t. 3 (Sur la stabilité de l'équilibre), wo weitere Litteraturangaben über die Arbeiten des Verf. zu finden sind, und Hadamard, ebendaselbst (Sur certaines trajectoires en dynamique); vgl. speziell pag. 365.

**) Vgl. Rigid dynamics, Part. II, Cap. III, art. 95 u. ff. Stability of motion, Cap. VI, art. 1—3.

$$T + V = h$$

aus. Die linke Seite, die Gesamtenergie des Systems, ist eine bekannte Funktion der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten, welche für alle Stadien der vorgelegten Bewegung den konstanten, gleichfalls bekannten numerischen Wert h besitzt. Man kann nun zeigen, dafs, wenn die Gesamtenergie für die vorgelegte Bewegung ein Extrem (d. h. ein Maximum oder Minimum) bezüglich der sämtlichen darin vorkommenden Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, die vorgelegte Bewegung absolut stabil sein mufs.

Allerdings kann in der Weise, wie es hier zunächst ausgedrückt ist, die Sache gar nicht eintreten. Betrachten wir nämlich insbesondere die Abhängigkeit der Gesamtenergie von den Geschwindigkeitskoordinaten. Da die lebendige Kraft eine positive quadratische Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten darstellt, wird sie im allgemeinen wachsen mit wachsenden, abnehmen mit abnehmenden Werten der Geschwindigkeitskoordinaten. Soll aber die Gesamtenergie ein wirkliches Extrem sein, so müfste T bei Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeitskoordinaten entweder nur wachsen oder nur abnehmen.

Infolgedessen sieht man sich mit Routh genötigt, die Stabilitätsfrage spezieller zu stellen. Man wird, um aus dem Energiekriterium einen wirklichen Nutzen ziehen zu können, nicht nach der totalen, sondern der partiellen Stabilität irgendwelcher Art fragen (vgl. den Schlufs des vorigen Paragraphen). Man wird also von den Anfangswerten der Impulskoordinaten einzelne (wir wollen sie $N, n, \ldots$. nennen) festhalten und den Anstofs so einrichten, dafs er nur eine Veränderung der übrigbleibenden Impulskoordinaten bewirkt. Überdies wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dafs diese Impulskoordinaten $N, n, \ldots$., wie unten im Falle des Kreisels, auch im Verlaufe der Bewegung konstant bleiben, so dafs wir im Folgenden von den „Impulskonstanten“ $N, n, \ldots$. reden werden.

Die Impulskoordinaten sind aber, wie später allgemein gezeigt werden wird, einfache (und zwar lineare) Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten, wobei noch die Lagenkoordinaten in die Koeffizienten eingehen können. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskoordinaten mit $\vartheta', \varphi', \ldots$, so haben wir demnach Gleichungen der folgenden Gestalt:

$$(3) \qquad f_1(\vartheta', \varphi', \ldots) = N, \quad f_2(\vartheta', \varphi', \ldots) = n, \ldots,$$

welche ebensowohl für die ursprüngliche, wie für die abgeänderte Bewegung gelten. (Routh betrachtet übrigens allgemeiner statt solcher Impulsgleichungen irgendwelche „erste Integralgleichungen“ des Problems, deren linke Seiten ein Aggregat der Lagen- und Geschwindigkeitskoordi-

naten und deren rechte Seiten Konstante sind. Der Anstofs müfste dann so gewählt werden, dafs die Konstanten der rechten Seiten durch ihn nicht geändert werden.)

Daraufhin werden wir aus dem Ausdrucke der Gesamtenergie so viele Geschwindigkeitskoordinaten eliminieren können, als wir Bedingungsgleichungen der vorstehenden Form haben, wobei die Impulskonstanten $N, n, \ldots$ (bez. die Integrationskonstanten $N, n, \ldots$) in den Energieausdruck eingehen werden. Die Forderung, dafs der so entstehende Energieausdruck ein wirkliches Extrem bezüglich der sämtlichen explizite in ihm enthaltenen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten darstelle, besagt ersichtlich weniger, als die frühere Forderung, dafs er ein Extrem schlechtweg (bezüglich aller Koordinaten) sei. Wir werden sogleich sehen, dafs unsere jetzige Forderung thatsächlich beispielsweise bei gewissen Kreiselbewegungen erfüllt ist.

Dies vorausgeschickt, sprechen wir das Routhsche Energiekriterium, wie folgt, aus:

Die vorgelegte Bewegung ist in sämtlichen nicht eliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten absolut stabil, wenn der Energieausdruck nach erfolgter Elimination ein wirkliches Extrem bezüglich eben dieser Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar partiell stabil gegenüber allen solchen Störungen, welche die in den Energieausdruck eingeführten Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert lassen.

Der Beweis gestaltet sich ähnlich wie im Falle des Gleichgewichtes: Wenn $T + V$ für die vorgelegte Bewegung ein wirkliches Minimum ist (der Fall des Maximums ist ähnlich zu behandeln), so können wir solche positive und negative Inkremente für jede einzelne der nicht-eliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten angeben, dafs der jeweilige Wert von $T + V$ vergröfsert wird, sobald wir mindestens einer der Lagen- oder Geschwindigkeitskoordinaten eins der bez. Inkremente erteilen, während gleichzeitig die übrigen Koordinaten ungeändert bleiben oder doch nur um weniger als die festgesetzten Inkremente abgeändert werden. Und zwar möge die so entstehende Vermehrung von $T + V$ in jedem Augenblicke der Bewegung gröfser werden als die positive (genügend klein zu wählende) Gröfse k:

$$T + V > h + k, \tag{1'}$$

Für die durch eine einmalige Störung abgeänderte Bewegung besteht gleichfalls der Satz von der lebendigen Kraft. Die Störung kann so klein gewählt werden, dafs der ursprüngliche Wert von h um weniger als k vermehrt wird. Wir haben also längs der ganzen abgeänderten Bewegung

$$T + V < h + k. \tag{2'}$$

Dabei setzen wir eine partielle Störung voraus, welche die Werte der Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert läfst.

Aus (1′) und (2′) schliefst man wie oben, dafs die Differenzen zwischen den Koordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung niemals die Gröfse der vorher festgesetzten Inkremente erreichen können. Da diese Inkremente aber selbst beliebig klein gewählt werden können, so folgt unmittelbar die absolute Stabilität der vorgelegten Bewegung in Bezug auf alle nicht eliminierten Koordinaten.

Zunächst soll die Forderung des Routhschen Kriteriums noch etwas schärfer präzisiert werden. Es genügt eigentlich nicht, zu verlangen, dafs die Energiefunktion $T + V$ ein Extrem schlechtweg sei. Beim Beweise wurde vielmehr vorausgesetzt, *dafs sich für alle Werte der Zeit oder, was dasselbe bedeutet, für alle Stellen der ursprünglichen Bahn ein und dieselbe positive (bez. negative) Zahl k angeben läfst*, oberhalb (bez. unterhalb) deren die Änderung der Energiefunktion bei Vermehrung eines oder mehrer ihrer Argumente um gewisse von Null verschiedene Zuwächse liegt. Die letztere Forderung besagt mehr als die Forderung, dafs $T + V$ an jeder einzelnen Stelle ein Extrem sein solle. Es könnte z. B. sehr gut sein, dafs wir für jeden Wert von t eine Zahl k von der genannten Beschaffenheit angeben können, dafs aber dieser Wert bei wachsendem t immer kleiner (bez. gröfser) wird und in der Grenze $t = \infty$ von Null nicht mehr verschieden ist. Wir wollen ein solches Extrem, wie es beim Beweise des Routhschen Satzes vorausgesetzt wird, im Anschlufs an eine in der Funktionentheorie übliche Bezeichnung ein *gleichmäfsiges Extrem* nennen, wobei sich das Wort „gleichmäfsig“ auf die Abhängigkeit der Energiefunktion von der Zeit bezieht und nichts anderes besagen soll, als dafs die von Null verschiedene Zahl k unabhängig von den Werten der Zeit fixiert werden kann. Hiernach würde das Routhsche Kriterium genauer so auszusprechen sein: *Die Bewegung ist sicher absolut stabil, wenn die Energiefunktion ein Extrem bezüglich ihrer sämtlichen Argumente, der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar gleichmäfsig für alle Werte von t.*

Der Zusammenhang dieses Bewegungskriteriums mit dem vorangehenden Gleichgewichtskriterium ist klar. Wenn V ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagenkoordinaten ist, so ist auch $T + V$ in der Gleichgewichtslage $T = 0$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten. Wenn umgekehrt $T + V$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, so braucht man nur die sämtlichen Geschwindigkeitskoordinaten gleich Null zu setzen, um zu sehen, dafs gleichzeitig auch V ein

Minimum bezüglich sämtlicher Lagenkoordinaten sein muſs. *Im Falle des Gleichgewichtes geht also das Routhsche Kriterium, soweit es sich auf ein Minimum von $T + V$ bezieht, in das Lagrange-Dirichletsche Kriterium über und umgekehrt.* Eine Spezialisierung des Anstoſses, wie sie oben durch die Gleichungen (3) vorgesehen wurde, wird dabei in diesem besonderen Falle überflüssig.

Die andere Aussage des Routhschen Satzes, wonach die Bewegung auch absolut stabil ist, wenn $T + V$ ein Maximum für diese Bewegung darstellt, kommt im Falle des Gleichgewichtes offenbar nicht in Frage. Da nämlich im Falle des Gleichgewichtes T sicherlich ein Minimum ist, so kann $T + V$ kein Maximum sein. In der That wächst ja T und auch $T + V$, wenn wir beispielsweise die Werte der Lagenkoordinaten festhalten, die der Geschwindigkeitskoordinaten aber irgendwie verändern.

Natürlich wird die Handhabung des Routhschen Bewegungskriteriums weniger bequem und seine Tragweite weniger umfassend, wie die des Gleichgewichtskriteriums, weil wir bei ersterem mehr über den Charakter der Bewegung voraussetzen müssen, wie bei letzterem über den des Gleichgewichtes und weil wir das Auftreten eines extremen Energiewertes bei der Bewegung überhaupt nur sozusagen durch eine Beschränkung der Beweglichkeit des Systems im Sinne der Gleichungen (3) erreichen können. In der That, wenn wir mit Routh verlangen, daſs die Gesamtenergie ein Extrem nicht nur bezüglich der Lagenkoordinaten, sondern auch noch bezüglich einer Anzahl (nicht eliminierter) Geschwindigkeitskoordinaten sein soll, so stellen wir gegenüber dem Gleichgewichtsfalle so viel Bedingungen mehr, als die Anzahl der nicht-eliminierten Geschwindigkeitskoordinaten beträgt. Es kommt noch bei genauer Formulierung des Bewegungskriteriums der lästige Zusatz der Gleichmäſsigkeit des Extrems für alle Werte von t hinzu, ein Zusatz, welcher bei dem Gleichgewichtskriterium ersichtlich von selbst überflüssig wird.

Dementsprechend wird das Anwendungsgebiet des Routhschen Kriteriums ziemlich beschränkt. Die Beispiele, die Routh l. c. giebt, unterscheiden sich nach erfolgter Elimination eigentlich nicht mehr wesentlich von Gleichgewichtsproblemen. Die Bewegung, deren Stabilität untersucht werden soll, wird nämlich meist so gewählt, daſs sie durch Nullsetzen aller im Energieausdrucke explicite vorkommenden Geschwindigkeitskoordinaten charakterisiert werden kann.*) In diesem

*) Es gehören hierher namentlich die sogenannten cyklischen Bewegungen, über welche wir uns später verbreiten werden.

Falle ist der Ausdruck der lebendigen Kraft, was die Geschwindigkeitskoordinaten angeht, gerade so wie im Gleichgewichtsfalle, von selbst ein Minimum. Es bleibt nur noch übrig den Energieausdruck auch bezüglich der Lagenkoordinaten auf seine Extremeigenschaft hin zu untersuchen, was dann nicht mehr Schwierigkeit macht, wie die Untersuchung der potentiellen Energie im Falle des Gleichgewichtes. Auch die Forderung der Gleichmäfsigkeit des Extrems wird bei solchen Bewegungsfällen überflüssig.

Von dieser speziellen Beschaffenheit sind auch die folgenden beiden Beispiele, welche wir der Theorie des Kreisels entnehmen. Es handle sich um die mehrfach besprochenen Fälle der *aufrechten Bewegung* und der *regulären Präcession*. Dabei wollen wir den Kreisel speziell als Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A voraussetzen. Der Energieausdruck lautet hier

$$(4)\quad T+V=\frac{A}{2}\left(\vartheta'^2+\sin^2\vartheta\cdot\psi'^2+(\varphi'+\cos\vartheta\cdot\psi')^2\right)+P\cos\vartheta.$$

Die Konstanz der Impulskomponenten n und N bei der einzelnen Bewegung bringt nach pag. 222 folgende Relationen für die Geschwindigkeitskoordinaten φ' und ψ' mit sich:

$$(5)\qquad A(\psi'+\cos\vartheta\varphi')=n,\qquad A(\varphi'+\cos\vartheta\psi')=N.$$

Die Störung soll in dem Sinne partiell gewählt werden, dafs diese Impulskonstanten nicht geändert werden. Der Anstofs soll also lediglich die [Θ-]Komponente des Impulses alterieren, d. h. die Knotenlinie zur Axe haben.

Mittelst der Gleichungen (5) werden wir nun φ' und ψ' aus (4) eliminieren. Es ergiebt sich dabei, weil die rechte Seite von (4) ebenso wie die Koeffizienten in (5) die Lagenkoordinaten φ und ψ selbst nicht enthalten, ein Ausdruck, welcher nur von ϑ und ϑ' abhängt, nämlich

$$(4')\quad T+V=\frac{1}{2A}\left[A^2\vartheta'^2+\frac{(n-N\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}+N^2+2AP\cos\vartheta\right].$$

Diese Funktion zweier Variabler haben wir auf ihre Extremeigenschaften hin zu prüfen.

Bei der *aufrechten Bewegung* ($\vartheta=\vartheta'=0$) ist $n=N$. Da diese Relation durch den Anstofs nicht abgeändert werden soll, so ergiebt sich für die gestörte Bewegung aus (4') der vereinfachte Energieausdruck:

$$2A(T+V)=A^2\vartheta'^2+\frac{N^2}{\cos^2\vartheta/2}+2AP\cos\vartheta.$$

Indem wir die bekannten Regeln für die Aufsuchung der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variabeln anwenden, entwickeln

wir den vorstehenden Ausdruck an der Stelle $\vartheta = \vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Lehrsatze und erhalten:

$$2A(T+V) = N^2 + 2AP + A^2\vartheta'^2 + \frac{1}{4}(N^2 - 4AP)\vartheta^2 + \cdots$$

Hier verschwinden die linearen Glieder in ϑ und ϑ'; die quadratischen bilden eine positive definite quadratische Form, sofern

$$N^2 - 4AP > 0 \tag{6}$$

ist. In diesem Falle besitzt also $T+V$ für $\vartheta = \vartheta' = 0$ ein wirkliches Minimum. Die Bewegung des aufrechten Kreisels ist also, gegenüber solchen partiellen Störungen, welche den gemeinsamen Wert von N und n ungeändert lassen, unter der Bedingung (6) absolut stabil.

Wir haben somit unser früheres Stabilitätskriterium wiedergefunden, allerdings in einer weniger scharfen Form, indem statt des Zeichens $\geqq$ das Zeichen $>$ getreten ist. Dafs in der abgeänderten Bewegung unter der Bedingung (6) der Wert von ϑ dauernd in der Nähe des ursprünglichen Wertes $\vartheta = 0$ liegt, ist uns aus § 4 und 5 genugsam bekannt. Unsere früheren Betrachtungen zeigten aufserdem, dafs auch im Hinblick auf die Koordinaten φ und ψ, sowie bei Abänderung von N im Falle $N^2 - 4AP \geqq 0$ die aufrechte Bewegung als stabil, wenn auch nicht als absolut stabil zu bezeichnen ist und dafs im Falle $N^2 - 4AP < 0$ die aufrechte Bewegung labil wird. Über die letzteren Punkte giebt unsere jetzige Betrachtung natürlich keinen Aufschlufs.

Wir betrachten sodann das Beispiel der *regulären Präcession*. Diese Bewegung ist dadurch charakterisiert, dafs $\vartheta' = 0$ ist und dafs ϑ einen Wert ϑ_0 hat, der sich aus der Gleichung $A\mu\nu = P$ oder (vgl. pag. 279)

$$\frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} \cdot \frac{N - n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} = AP \tag{7}$$

bestimmt. Wir denken uns diese Bewegung wiederum durch einen Anstofs gestört, welcher die Impulskonstanten n und N ungeändert läfst und lediglich die (in der Energiefunktion nicht explicit auftretende) Impulskomponente $[\Theta]$ beeinflufst. Darauf entwickeln wir den Ausdruck $2A(T+V)$ an der Stelle $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Satze. Das konstante Glied, welches den Energiebetrag bei der regulären Präcession bedeutet, ist nach Gleichung (4′)

$$a_0 = \left(\frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\right)^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta_0;$$

dieses kommt für das Folgende nicht wesentlich in Betracht. Hierauf suchen wir die Glieder erster Ordnung in $\vartheta - \vartheta_0$ und ϑ' auf, welche von der Form sind

$$a_1(\vartheta - \vartheta_0) + a_2\vartheta'.$$

Offenbar verschwindet der Koeffizient a_2. Der Koeffizient a_1 ist gleich dem Werte von

$$\frac{\partial\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta}$$

für $\vartheta = \vartheta_0$. Rechnet man den genannten Differentialquotienten aus, so findet man ohne Mühe

$$2\sin\vartheta\left\{\frac{n-N\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}-AP\right\} \tag{8}$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen Gleichung (7). Die Glieder erster Ordnung verschwinden also, wie es für das Eintreten eines Maximums oder Minimums erforderlich ist.

Die Glieder zweiter Ordnung haben sodann die Form

$$a_{11}(\vartheta-\vartheta_0)^2+2a_{12}(\vartheta-\vartheta_0)\vartheta'+a_{22}\vartheta'^2.$$

Hier sieht man ohne weiteres, dafs $a_{22}=A^2$, $a_{12}=0$ ist. Es bleibt also nur noch

$$a_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta^2}\right)_{\vartheta=\vartheta_0}$$

zu berechnen. Führen wir in (8) eine abermalige Differentiation nach ϑ aus und setzen $\vartheta=\vartheta_0$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}a_{11}&=\sin\vartheta_0\frac{d}{d\vartheta_0}\left(\frac{n-N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\right)\\&=\frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist sicher positiv. Der erste Faktor des Zählers bedeutet nämlich das Quadrat derjenigen Strecke, welche wir erhalten, wenn wir den Endpunkt der Impulskomponente N mit dem Endpunkte der Impulskomponente n verbinden; die übrigen Faktoren sind offenbar gleichfalls positiv. Mithin stellen die Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}(\vartheta-\vartheta_0)^2+A^2\vartheta'^2$$

eine positive quadratische Form dar. Die Existenz eines Minimums ist hierdurch bewiesen. Aus dem Kriterium von Routh folgt daher, dafs die reguläre Präcession in Bezug auf die Koordinate ϑ absolut stabil ist gegenüber allen solchen Störungen, welche die Impulskonstanten n und N ungeändert lassen — in Übereinstimmung mit den Resultaten von § 1. Das Verhalten der Bahn bei Abänderung von n und N und bei Berücksichtigung der Koordinaten φ und ψ entzieht sich unserer letzten Betrachtung; wir haben früher gesehen, dafs bei solchen allgemeinen Störungen die Bewegung zwar stabil aber nicht mehr absolut stabil ist.

Wiederum entsteht die Frage nach der Umkehr des Routhschen Kriteriums. Können wir etwa behaupten, dafs im Falle $T + V$ kein wirkliches Minimum oder Maximum vorstellt, die Bewegung nicht absolut stabil sein könne? Hierüber ist bisher nichts Sicheres bekannt. Der Vergleich mit dem Dirichletschen Kriterium und die oben berichteten Schwierigkeiten, welche sich der Umkehrung des letzteren entgegenstellen, lassen eine etwaige Umkehrung des Routhschen Kriteriums nicht gerade als aussichtsvoll erscheinen. —

§ 8. Über die Methode der kleinen Schwingungen.

Wir gehen nun auf die bekannteste Methode zur Untersuchung der Stabilitätsfragen ein, auf die sogenannte *Methode der kleinen Schwingungen.* Die vorangehenden Kreiselbetrachtungen liefern uns das Mittel, diese wichtigen und in der Litteratur immer wiederkehrenden Entwickelungen nach ihrem inneren Werte zu verstehen. Historisch hat sich die Methode der kleinen Schwingungen aus der Betrachtung des Pendels entwickelt, dessen kleine Schwingungen ja von altersher studiert sind und eine weittragende theoretische und praktische Bedeutung haben.

Indessen werden wir die Methode der kleinen Schwingungen hier weiter zu fassen haben, als sie für das Pendel in Betracht kommt. Die Pendelschwingungen sind nämlich *Schwingungen um eine Gleichgewichtslage;* demgegenüber werden wir, da es sich für uns um die Stabilität der Bewegungen handelt, allgemein *Schwingungen um einen Bewegungszustand* besprechen.

Zunächst ein paar Worte über die Methode im allgemeinen.

Indem man die auf ihre Stabilität zu prüfende Bewegung als vollständig bekannt ansieht, denkt man sich die Lagenkoordinaten bei dieser Bewegung als bekannte Funktionen der Zeit gegeben. Man ändert nun die Bewegung durch einen Anstofs ab und fafst die Differenzen der Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung in's Auge, welche man samt ihren Differentialquotienten nach der Zeit als kleine Gröfsen voraussetzt, da man nach den kleinen Schwingungen des Systems fragt. Sodann entwickelt man die Differentialgleichungen für diese Koordinatendifferenzen aus den allgemeinen Differentialgleichungen des Systems und vereinfacht sie durch Vernachlässigung höherer Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröfsen. Es trifft sich in gewissen ziemlich allgemeinen Fällen, dafs die so vereinfachten Differentialgleichungen leicht integriert werden können. Aus ihren Lösungen beurteilt man den Charakter der abgeänderten Bewegung und zieht hieraus seine Schlüsse auf die Stabilität oder

eigentlich auf die absolute Stabilität des ursprünglich vorgelegten Bewegungszustandes. Des Genaueren wollen wir diese Methode an dem bereits mehrfach behandelten *Problem des aufrechten Kreisels* auseinandersetzen, welches ja als direkte Verallgemeinerung des gewöhnlichen Pendelproblems angesehen werden kann.

Zunächst bemerken wir, wie pag. 316, dafs die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ zur Behandlung des aufrechten Kreisels nicht recht geeignet sind, da bei der ursprünglichen aufrechten Lage den Koordinaten φ und ψ eine selbständige Bedeutung abgeht. Wir benutzen daher wieder die Kombination

$$\varphi + \psi = \chi. \tag{1}$$

Als weitere Lagenkoordinaten mögen die Gröfsen x und y von pag. 331 dienen, welche die rechtwinkligen Koordinaten der auf die Äquatorebene projicierten Kreiselspitze bedeuten:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta \cos\psi, \\ y = \sin\vartheta \sin\psi. \end{cases} \tag{2}$$

In diesen Koordinaten ist die ursprüngliche Bewegung charakterisiert durch die Gleichungen

$$x = y = 0, \qquad C\chi' = N.$$

Wir denken uns nun die Bewegung durch eine Störung abgeändert, wobei wir jedoch (wie pag. 361) von einer Veränderung der Winkelgeschwindigkeit χ' absehen wollen. Die Werte von x und y sind dann selbst die Differenzen zwischen den Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung. Es handelt sich vor allem darum, die Differentialgleichungen der x und y, d. h. der abgeänderten Bewegung zu ermitteln. Wir benutzen das Schema der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen. Hierzu ist erforderlich, den Ausdruck der lebendigen Kraft, sowie die Komponenten der Schwere in den Koordinaten x, y und χ zu kennen.

Nach Gleichung (6) von pag. 156 haben wir für den symmetrischen Kreisel, den wir hier, um das Pendel bequem in die Betrachtung einzubegreifen, vor dem Kugelkreisel bevorzugen wollen,

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\cdot\psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\cdot\psi')^2.$$

Aus (1) und (2) folgt nun:

$$\sin\vartheta = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x},$$

$$\vartheta' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}, \quad \psi' = \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}, \quad \varphi' = \chi' - \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}.$$

Mithin wird

$$T = \frac{A}{2}\left(\frac{(xy' - yx')^2}{x^2+y^2} + \frac{(xx' + yy')^2}{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}\right) + \frac{C}{2}\left(\chi' - (1-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}\right)^2.$$

Andrerseits rechnen wir die potentielle Energie V in die neuen Koordinaten x und y um. Wir haben:

$$V = P\cos\vartheta = P\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Aus diesem Werte von V ergeben sich die Komponenten der Schwerkraft nach den Koordinaten x und y in bekannter Weise als partielle Differentialquotienten.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen wollten wir alle höheren Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröfsen x und y und ihrer Differentialquotienten x' und y' vernachlässigen. *Es kommt dieses auf dasselbe heraus, wie wenn wir die Ausdrücke für T und V nach x, x', y und y' entwickeln und in der Entwickelung nur die quadratischen Terme beibehalten.* Thun wir dieses, so heben sich die Nenner fort und es vereinfachen sich jene Ausdrücke zu:

$$(3)\qquad \begin{cases} T = \frac{A}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{C}{2}(\chi'^2 + \chi'(xy' - yx')), \\ V = P - \frac{P}{2}(x^2+y^2). \end{cases}$$

Hierauf berechnen wir die Komponenten des Impulses $[X]$, $[Y]$ und $[\chi]$, sowie die Komponenten der Schwere X und Y. (Die auf die χ-Koordinate wirkende Komponente ist ersichtlich gleich Null.) Es ergiebt sich

$$[X] = \frac{\partial T}{\partial x'} = Ax' - \frac{C}{2}\chi' y,$$

$$[Y] = \frac{\partial T}{\partial y'} = Ay' + \frac{C}{2}\chi' x,$$

$$[\chi] = \frac{\partial T}{\partial \chi'} = C\left(\chi' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right),$$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = Px,$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = Py,$$

wobei wir noch in dem für $[\chi]$ angegebenen Werte die Glieder zweiter Ordnung in x und y gegen χ' konsequenter Weise wegstreichen werden.

Die auf die χ-Koordinate bezügliche Lagrangesche Gleichung lautet nun einfach

$$(4)\qquad \frac{d[\chi]}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad C\chi' = \text{const} = N.$$

Berechnen wir noch

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C}{2}\chi' y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{C}{2}\chi' x',$$

so nehmen die beiden anderen Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d[X]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad \frac{d[Y]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial y} = Y$$

mit Rücksicht auf (4) die folgende Gestalt an:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Ax'' - Ny' = Px, \\ Ay'' + Nx' = Py. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen haben, wie wir sehen, eine äufserst einfache Struktur; es sind *homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Hier mögen wir zunächst an den Spezialfall des Pendels erinnern. Setzen wir $C = 0$ und also auch $N = 0$, ferner $A = ml^2$, $P = -mgl$, indem wir an ein Pendel von der Länge l denken, dessen Massenpunkt m sich in der Ruhelage senkrecht unterhalb des Unterstützungspunktes befindet, so folgt aus (5)

$$\text{(5')} \qquad \begin{cases} Ax'' = Px, \\ Ay'' = Py, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x'' &= -\frac{g}{l}x, \\ y'' &= -\frac{g}{l}y. \end{aligned}$$

Die Integration liefert sofort das bekannte Schwingungsgesetz des Pendels bei hinreichend kleinem Ausschlag.

Die Gleichungen (5) unterscheiden sich von (5'), wie man sieht durch das Auftreten von Termen in x' und y'. Diese, können wir sagen, zeigen uns das Vorhandensein einer Rotation („Gyration" um die Kreiselaxe) an; sie werden deshalb in dem Werke von Thomson und Tait als *„gyroskopische Terme"* bezeichnet. Wir beabsichtigen später auf die interessante Theorie dieser Terme ausführlich einzugehen. Hier sei nur noch bemerkt, dafs ihre Koeffizienten in (5), nämlich $\begin{vmatrix} 0 & -N \\ +N & 0 \end{vmatrix}$ eine sogenannte schiefe Determinante bilden.

Die Lösung unserer Differentialgleichungen (5) ergiebt sich nach einer bekannten Regel*) in folgender Weise. Man fasse zunächst die

*) Die folgenden Rechnungen sind für die Integration eines beliebigen Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten typisch. Die Technik derartiger Integrationen wird namentlich im zweiten Bande der Rigid dynamics von Routh sehr weit durchgebildet.

zwei Gleichungen (5) in eine zusammen, indem man sie bez. mit 1 und i multipliziert und addiert. Die komplexe Verbindung $x + iy$ heifse z. So entsteht

$$A z'' + i N z' = P z. \tag{6}$$

Darauf setze man versuchsweise an:

$$z = a e^{i\lambda t}; \tag{7}$$

dann liefert (6) folgende Bedingung für die soeben eingeführte Gröfse λ:

$$A\lambda^2 + N\lambda + P = 0. \tag{8}$$

Hieraus folgen zwei Werte $\lambda = \mu$ und $\lambda = \mu'$, nämlich

$$\left.\begin{matrix}\mu \\ \mu'\end{matrix}\right\} = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} \tag{9}$$

und zwei partikuläre Lösungen von (8), nämlich

$$z = a e^{i\mu t} \text{ bez. } z = a' e^{i\mu' t}$$

mit je einer willkürlichen Konstanten a bez. a'; aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung durch Superposition zusammen. Die allgemeine Lösung von (8) lautet daher, wenn wir noch a und a' in einen reellen und imaginären Teil spalten ($a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$):

$$z = (\alpha - i\beta) e^{i\mu t} + (\alpha' - i\beta') e^{i\mu' t}. \tag{10}$$

Für das Weitere hat man zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem μ und μ' reell oder komplex sind. *Ersteres tritt ein, wenn* $N^2 - 4AP > 0$, *letzteres, wenn* $N^2 - 4AP < 0$ *ist.*

I) Ist $N^2 - 4AP > 0$, so schreiben wir statt (10), indem wir z in seinen reellen und imaginären Teil auflösen:

$$\begin{cases} x = \alpha \cos \mu t + \beta \sin \mu t + \alpha' \cos \mu' t + \beta' \sin \mu' t, \\ y = \beta \cos \mu t - \alpha \sin \mu t + \beta' \cos \mu' t - \alpha' \sin \mu' t. \end{cases} \tag{11}$$

Als Anfangsbedingungen schreiben wir etwa vor:

$$x = y = y' = 0.$$

Dann folgt aus (11):

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \mu\alpha + \mu'\alpha' = 0,$$

d. h.

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \beta = -\beta' = \frac{\eta}{2}.$$

Die hier eingeführte und noch disponible Gröfse η entspricht der unbestimmt gelassenen Gröfse der Anfangsgeschwindigkeit x'.

Nunmehr ergiebt sich aus (11)

$$\begin{cases} x = \frac{\eta}{2}(\sin \mu t - \sin \mu' t) = \quad \eta \cos \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t, \\ y = \frac{\eta}{2}(\cos \mu t - \cos \mu' t) = -\eta \sin \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t. \end{cases} \tag{12}$$

Berechnen wir schliefslich $\frac{\mu+\mu'}{2}$ und $\frac{\mu-\mu'}{2}$ aus (9), so können wir für (12) schreiben:

$$(13)\qquad \begin{cases} x = \eta \cos \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2-4AP}}{2A} t, \\ y = \eta \sin \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2-4AP}}{2A} t. \end{cases}$$

Somit sind wir genau auf die pag. 331 entwickelten Gleichungen (11) zurückgeführt.

II) Betrachten wir nun den zweiten Hauptfall $N^2 - 4AP < 0$, wo μ und μ' komplex werden. Wir setzen

$$\mu = \nu + i\nu', \quad \mu' = \nu - i\nu',$$

lösen (10) in einen reellen und imaginären Teil auf und erhalten

$$(14)\qquad \begin{cases} x = +\{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t, \\ y = -\{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t. \end{cases}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$x = y = y' = 0$$

folgt sodann

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = -\beta + \beta' = 0,$$

d. h.

$$\beta = \beta' = 0, \quad \alpha = -\alpha' = \frac{\eta}{2}.$$

Mithin wird:

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \cos \nu t, \\ y = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \sin \nu t. \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = -\frac{N}{2A}, \\ \nu' = \frac{\sqrt{4AP-N^2}}{2A}. \end{cases}$$

III) Schliefslich müssen wir auch noch den Grenzfall durchrechnen, wo $N^2 - 4AP = 0$ wird, wo also μ und μ' zusammenfallen. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (8) mit der erforderlichen Anzahl willkürlicher Konstanten hat man in diesem Falle in der folgenden Form anzusetzen:

$$z = (a + a't) e^{i\mu t}.$$

Für den reellen und imaginären Teil von z ergiebt sich jetzt, wenn wir wieder $a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$ machen:

$$x = +(\alpha + \alpha' t) \cos \mu t + (\beta + \beta' t) \sin \mu t,$$
$$y = -(\beta + \beta' t) \cos \mu t + (\alpha + \alpha' t) \sin \mu t.$$

Unter den früheren Anfangsbedingungen folgt ferner

$$\alpha = \beta = \beta' = 0$$

und, indem wir α' durch η ersetzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = \eta t \cos \mu t, \\ y = \eta t \sin \mu t, \end{cases} \quad \mu = -\frac{N}{2A}.$$

Wir wollen nun die in den Gleichungen (13), (15) und (16) gewonnenen Resultate im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen diskutieren.

Die durch (13) dargestellte Bewegung der Kreiselspitze ist ihrem zeitlichen Verlaufe nach vollkommen periodisch. Sie stellt also eine Schwingung dar und zwar eine kleine Schwingung, weil die maximale Entfernung η der Kreiselspitze von ihrer ursprünglichen Lage um so kleiner ausfällt, je kleiner wir den Anfangswert von x', d. h. die anfängliche Störung wählen. Nach (12) können wir diesen Schwingungsvorgang übrigens auch auffassen als Überlagerung zweier einfachharmonischer Schwingungen („Fundamentalschwingungen"), von den Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\mu'}$.

Anders die durch (15) und (16) gegebenen Bewegungen. Diese besitzen einen periodischen und einen aperiodischen Bestandteil. Letzterer bewirkt, dafs die Entfernung des Punktes x, y von der Ruhelage, nämlich

$$\sqrt{x^2+y^2} = \eta \frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2} \text{ bez. } = \eta t$$

mit wachsendem t gröfser und gröfser wird, genauer gesagt, dafs sie bei hinreichend grofsem t jede beliebige Grenze übersteigt, wie klein auch der ursprüngliche Anstofs gewesen sein möge. Die Bewegung ist alsdann keine Schwingung und sicherlich keine kleine Schwingung. Die Bahnkurve hat vielmehr eine Spiralengestalt. Gleichung (15) stellt im wesentlichen eine logarithmische, Gleichung (16) eine Archimedische Spirale vor.

Welche Schlüsse wird man nun aus diesem Verhalten bezüglich der Stabilität der aufrechten Kreiselbewegung zu ziehen haben? Wir wollen uns dabei zunächst auf einen völlig naiven Standpunkt stellen, von dem aus die in den rechnenden Naturwissenschaften überall übliche Vernachlässigung höherer Potenzen ohne Bedenken acceptiert wird. Von diesem Standpunkte aus werden wir die Gleichungen (13), (15) und (16), wenn auch nicht als genaue, so doch als angenäherte Beschreibung der wirklichen Bahn ansprechen und werden direkt sagen:

Im ersten Hauptfalle $N^2 - 4AP > 0$ ist die Bewegung der Kreiselspitze stabil oder sogar in unserer Terminologie absolut stabil. Im zweiten Hauptfalle $N^2 - 4AP < 0$, sowie im Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ dagegen ist die Bewegung instabil.

Zu dieser Schlufsweise haben wir nun Stellung zu nehmen.

Wollen wir dieselbe zunächst nach ihrem Erfolge beurteilen, so werden wir sagen müssen: *Die Unterscheidung zwischen den stabilen und den labilen Fällen wird im allgemeinen, aber auch nur im allgemeinen richtig getroffen.* In der That ist ja die Ungleichung $N^2 - 4AP \gtrless 0$ unser wohlbekanntes Stabilitätskriterium. Dabei wird aber der Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$ hier falsch klassifiziert; er erscheint den labilen Fällen zugeteilt, während er (vgl. pag. 323) bei strenger Methode durchaus den stabilen Fällen zuzurechnen ist.

Ferner sehen wir, was die Gestalt der Bahnkurven angeht: *Im ersten Hauptfalle wird die Bewegung der Kreiselspitze durch unsere jetzige Methode richtig wiedergegeben, d. h. mit um so gröfserer Annäherung, je kleiner der ursprüngliche Anstofs war. Im zweiten Hauptfalle dagegen, sowie im Grenzfalle liefern unsere jetzigen Formeln ein ganz falsches Bild der Bewegung.* In der That unterschied sich in strenger Behandlung z. B. die Bahnkurve für $N^2 - 4AP = 0$ ihrem qualitativen Charakter nach durch nichts von den Bahnkurven $N^2 - 4AP > 0$. Auch die Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP < 0$ besafsen im allgemeinen dieselben Periodicitätseigenschaften, wie die stabilen Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP > 0$; der Spiralencharakter, welcher nach den jetzigen Formeln diesen Bahnkurven allgemein anhaften soll, kam in Wirklichkeit nur in einem besonderen Spezialfalle zum Vorschein. Man könnte auch daran erinnern, dafs die Gröfsen x und y ihrer geometrischen Bedeutung nach sicher kleiner als 1 sein müssen, während sie den Formeln (15) und (16) zufolge beliebiger Werte fähig sein sollen.

Noch übler steht die Sache, wenn wir unser Verfahren auf seine innere Berechtigung hin prüfen. Betrachten wir zunächst den vermeintlichen aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Nachweis, dafs die aufrechte Bewegung im Falle $N^2 - 4AP > 0$ stabil sei.

Indem wir in den Differentialgleichungen der Bewegung bez. in den Ausdrücken für T und V diejenigen Vernachlässigungen eintreten lassen, welche nur (oder höchstens) im stabilen Falle gerechtfertigt sind, machen wir von vornherein die Annahme, dafs die Bewegung stabil sei. Wir führen dann die oben angegebenen Rechnungen aus und finden, dafs im Falle $N^2 - 4AP > 0$ das Resultat der Rechnung unserer ursprünglichen Annahme nicht gerade widerspricht. Wollten wir nun hieraus umgekehrt auf die Richtigkeit jener Annahme schliefsen, so würden wir uns eines offenbaren „circulus vitiosus“ schuldig machen. Nichtsdestoweniger wird dieser Schlufs bei der Methode der kleinen Schwingungen regelmäfsig angewandt.

Unsere hiermit formulierte Kritik ist nicht etwa neu. Wir wollen in dieser Hinsicht einige Worte von Dirichlet citieren, welche im Anfange der oben citierten Arbeit über die Stabilität des Gleichgewichtes vorkommen. Das im vorigen Paragraphen besprochene Kriterium des Gleichgewichtes war ursprünglich von Lagrange gerade nach der Methode der kleinen Schwingungen begründet. Dirichlet setzt die Unhaltbarkeit dieser Begründung auseinander und bemerkt unter anderem: „Es kann mit Recht bezweifelt werden, ob Gröfsen, für die man unter der *Voraussetzung*, dafs sie immer klein bleiben — denn nur in dieser liegt die Befugnis, die höheren Glieder zu vernachlässigen — kleine Grenzen findet, nach einer beliebigen Zeit wirklich in diese oder überhaupt nur in enge Grenzen eingeschlossen sein werden.“*) Genau derselbe Einwand läfst sich aber gegen die meisten modernen Arbeiten erheben, in denen die Methode der kleinen Schwingungen zur Untersuchung der Bewegungsstabilität herangezogen wird.

Man sieht übrigens an diesem Beispiele, wie lange es dauert, bis die Ergebnisse der strengeren mathematischen Forschung in den angewandten Wissenschaften Eingang und Berücksichtigung finden.

Günstiger scheinbar stehen die Chancen für den aus unserer Methode fliefsenden vermeintlichen Nachweis, dafs die Bewegung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ instabil sei. Zu Beginn der Rechnung machen wir nämlich, wie gesagt, bei der Vernachlässigung der höheren Glieder die ausdrückliche Annahme, dafs die Werte von x und y dauernd klein bleiben oder, genauer gesagt, durch Wahl des Anstofses beliebig klein gemacht werden können. Diese Annahme wird nun durch das Resultat der Rechnung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ in unzweideutiger Weise ad absurdum geführt. Es scheint daher der Schlufs berechtigt, dafs jene Annahme unzulässig ist, dafs also x und y nicht dauernd klein bleiben, und dafs die Bewegung in diesem Falle instabil ist.

Genau genommen wird aber hierdurch nicht die Unzulässigkeit der Annahme kleiner x, y, sondern nur die Unzulässigkeit der getroffenen Vernachlässigungen dargethan. Es könnte sehr wohl sein, dafs die x und y und also auch die höheren Glieder in den fraglichen Entwicklungen dauernd beliebig klein aber nicht beliebig klein gegen die beibehaltenen ersten Glieder gemacht werden können, sofern nämlich letztere für besondere Werte der Konstanten identisch verschwinden. In diesem Falle wäre die Vernachlässigung der höheren Glieder offenbar unberechtigt; die betreffende Bewegung könnte dann, nach der

*) Ähnlich äufsert sich Jacobi in der vierten Vorlesung über Dynamik. Vgl. Ges. W. Supplementb. pag. 30.

Methode der kleinen Schwingungen behandelt, instabil erscheinen, während sie in Wirklichkeit stabil sein könnte.

Solch ein Fall liegt gerade in dem Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ vor, bei dem ja die Stabilitätsentscheidung, wie sie durch die Methode der kleinen Schwingungen geliefert wird, irreführend ist.

Hiernach werden wir unsere Kritik der Methode folgendermafsen zusammenfassend formulieren: *Weder sind die in jener Methode stabil erscheinenden Fälle als stabil bewiesen, noch sind die als labil erscheinenden in Wirklichkeit immer labil. Die Methode sagt also über die Stabilität und Labilität der Bewegungen strenge genommen nichts.*

Der Nutzen der Methode besteht daher, von diesem rigorosen Standpunkte aus beurteilt, lediglich darin, dafs sie für manche stabile Fälle (in unserem Beispiel die Fälle $N^2 - 4AP > 0$) auf bequemem Wege Annäherungsformeln liefert, wobei allerdings der Grad der Annäherung und die Berechtigung der Formeln zunächst unkontrollierbar bleiben.

Von einem mehr praktischen Standpunkte aus wird man dieses Verdikt allerdings wesentlich modifizieren müssen. Solange man keine allgemeine einwandfreie Methode hat, wird man mit einer unstrengen vorlieb nehmen müssen, zumal die Probleme, welche bisher mit der Methode der kleinen Schwingungen behandelt worden sind, das gröfste Interesse beanspruchen und nicht einfach zurückgeschoben werden können.

Natürlich bezieht sich unsere Kritik nur auf den zeitigen Stand der Methode, nicht auf die Methode selbst. Diese hat ohne Frage einen wertvollen Kern von Wahrheit, welcher, von Schlacken befreit, nicht nur vorläufige, sondern auch zuverlässige Aufschlüsse über die interessantesten Fragen der modernen Mechanik verspricht. Vermutlich wird es nur nötig sein, der Methode einige Einschränkungen und Verschärfungen hinzuzufügen.

In welcher Richtung diese Verschärfungen zu suchen sind, kann nach dem Früheren nicht zweifelhaft sein. *Man mufs aus den exakten Differentialgleichungen den Bewegungsvorgang wenigstens im Umrifs herzuleiten und auf Grund einer solchen allgemeinen Kenntnis der Bewegung den Fehler abzuschätzen suchen, den man in der Methode der kleinen Schwingungen bei der Vernachlässigung der höheren Terme begeht.* In solcher Weise haben wir in der That zu Ende des vorigen Kapitels unsere Formeln zur näherungsweisen Berechnung der Kreiselbewegung gewonnen, welche sich ja mit den aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Näherungsformeln in allen den Fällen als identisch erwiesen, wo die letzteren brauchbar waren.

In der Litteratur liegen zahlreiche Bestrebungen in der angedeuteten Richtung bereits vor. Wir erwähnen die Arbeiten von Hrn. Liapounoff*), und namentlich Poincaré's**) Untersuchungen zur Himmelsmechanik, sowie überhaupt die modernen Beiträge zur Störungsrechnung, welche sich zum grofsen Teil gerade mit der mathematischen Präcisierung der in der Methode der kleinen Schwingungen vorkommenden Entwicklungen befassen. Auch in den Werken von Hrn. Routh***), welche die reichste Fundgrube für Stabilitätsfragen sind, finden sich bereits Ansätze zur mathematischen Verschärfung der Methode vor.

§ 9. Über die Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels.

Wir wollen jetzt über die spärlichen Resultate berichten, welche man bisher bezüglich der Bewegung des schweren allgemeinen Kreisels gewonnen hat.

Die Differentalgleichungen für den allgemeinen Kreisel können etwa nach dem Schema der Eulerschen Gleichungen (s. pag. 141, Gleichung (3)) gebildet werden. Wir wollen dieselben nicht hinschreiben, sondern nur ihre mechanische Bedeutung wiederholen: Sie besagen, dafs die Impulsänderung in jedem Momente gleich dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere ist. Um die Axe und Gröfse desselben zu bestimmen, markieren wir im Körper den Schwerpunkt S; er habe im XYZ-System die Koordinaten ξ, η, ζ. Dabei setzen wir der Allgemeinheit wegen voraus, dafs die Richtung OS mit keiner der Hauptaxen, welche zu Koordinatenaxen gewählt sein mögen, zusammenfalle. Die Axe des Drehmomentes der Schwere wird alsdann die auf OS und der Vertikalen gleichzeitig senkrechte Gerade. Seine Gröfse beträgt $P \sin \vartheta$, wo $P = mgE$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die Entfernung der Punkte O und S, ϑ gleich dem Winkel zwischen der Vertikalen und dem Halbstrahl OS gesetzt ist.

Ähnlich wie im dritten Paragraphen des vorigen Kapitels können wir auch hier unmittelbar eine Aussage über das Verhalten des Impulses machen, welche analytisch ein erstes Integral der Bewegungs-

*) Vgl. oben pag. 356.

**) Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, vgl. z. B. Cap. IV, wo allerdings (pag. 177) die Definition der Stabilität noch ganz im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen formuliert wird.

***) Rigid dynamics, Part II, Cap. VII, Stability of motion, Cap. VII. Die hier gegebenen Ausführungen liefern bereits darüber Aufschlufs, weshalb in unserem Beispiel für den Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$, wo die Perioden der beiden Fundamentalschwingungen zusammenfallen, die Entscheidung des Stabilitätscharakters auf Grund lediglich der linearen Entwickelungsterme falsch ausfallen kann.

gleichungen liefert. Wegen der horizontalen Lage der Axe des Schweremomentes schreitet nämlich der Impuls-Endpunkt notwendig dauernd in horizontaler Richtung vorwärts. *Die Vertikalkomponente des Impulses ist also konstant*, wir haben wieder

$$n = \text{const.}$$

Aufserdem gilt natürlich auch jetzt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen wir ja im zweiten Kapitel für jeden starren Körper und jedes konservative Kraftsystem abgeleitet haben:

$$T + V = h.$$

Wollen wir diese Gleichung in Worte fassen, so haben wir uns der geometrischen Bedeutung des Ausdrucks der lebendigen Kraft (vgl. pag. 96) zu erinnern und haben ferner die potentielle Energie $V = mg \cdot E \cos\vartheta$ in naheliegender Weise zu interpretieren. Wir können dann sagen:

Das halbe skalare Produkt aus Impuls- und Drehungsvektor vermehrt um das Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die vertikale Erhebung des Schwerpunkts bleibt während der Bewegung des allgemeinen Kreisels konstant.

Dagegen verliert in unserem Falle die vom symmetrischen Kreisel her bekannte Gleichung $N = \text{const}$ ihre Gültigkeit, welche offenbar lediglich eine Folge der symmetrischen Massenverteilung war.

Die vollständige analytische Beherrschung der unsymmetrischen Kreiselbewegung ist aber auf Grund der obigen beiden Integrale noch nicht möglich. Bevor wir über die weiteren Versuche in dieser Richtung sprechen, wird es gut sein, das zu erreichende Ziel schärfer ins Auge zu fassen. Das Ziel mufs offenbar dieses sein: eine klare Vorstellung von dem Bewegungsvorgange zu gewinnen. Derjenige Weg wird der beste sein, der am direktesten auf dieses Ziel hinführt.

Demgegenüber erscheint in zahlreichen Arbeiten über Mechanik, z. B. in den sogleich zu nennenden, der Zielpunkt wesentlich verschoben. Man gewinnt den Eindruck, als ob die wichtigste Aufgabe der analytischen Mechanik darin bestände, ein Problem auf Quadraturen zurückzuführen bez. solche Probleme aufzufinden, die sich durch Quadraturen lösen lassen. In Wirklichkeit ist doch aber die Zurückführung auf Quadraturen nur ein Mittel zum Zweck, welches noch dazu in den seltensten Fällen anwendbar ist und welches selbst da, wo es anwendbar ist, seinen Zweck nicht einmal vollständig erreicht, sofern nämlich die gefundenen Integrale eine komplizierte Bauart haben. Die einseitige Betonung der Quadrierbarkeit oder Nichtquadrierbarkeit entspricht fraglos nur der schulmäfsigen Gewöhnung der Mathematiker und ist in der Sache selbst nicht begründet.

Wenn es sich im Speziellen so trifft, dafs ein Problem auf Quadraturen oder allgemeiner auf bekannte Funktionen führt, so wird man natürlich von diesem Umstande gern Nutzen ziehen. Dabei wird man sich aber gegenwärtig halten, dafs mit der geschlossenen analytischen Darstellung der Integrale nur der erste Schritt gethan ist und dafs die Hauptaufgabe darin bestehen mufs, auf Grund dieser Darstellung zu einem vollständigen geometrischen und mechanischen Verständnis der Bewegung zu gelangen.

In allen anderen Fällen, wo eine Zurückführung auf bekannte Funktionen nicht möglich ist, wird man dagegen ein anderes Verfahren einschlagen müssen — ein Verfahren, welches überhaupt bei der Integration von Differentialgleichungen geboten ist: Man suche sich zunächst über den *qualitativen* Verlauf der durch die Differentialgleichungen definierten Bahnkurven eine Vorstellung zu bilden, indem man etwa die singulären Stellen der Differentialgleichungen, die instabilen Bewegungsfälle, die möglichen periodischen und asymptotischen Bahnkurven u. s. w. studiert. Dann erst entwickle man aus dieser vorläufigen Kenntnis heraus geeignete konvergente oder nichtkonvergente *Näherungsmethoden*, welche die *quantitative* Berechnung der Bahn mit beliebiger oder begrenzter Genauigkeit ermöglichen. Als Vorbild können dabei die Untersuchungen Poincarés über das Dreikörperproblem gelten, der seine grofsen Erfolge gerade der eben skizzierten freieren und allgemeineren Auffassung des Integrationsgeschäftes verdankt.

In diesem Sinne ist für die Behandlung des unsymmetrischen Kreisels wenig geschehen. Die zunächst zu nennenden Arbeiten gehen vielmehr ausschliefslich auf Fälle geschlossener analytischer Darstellbarkeit aus.

Frau S. Kowalevski*) findet, dafs aufser den oben genannten Integralen noch ein weiteres in ziemlich einfacher algebraischer Form angegeben werden kann, wenn die Massenverteilung des Kreisels den folgenden Bedingungen genügt: Das Trägheitsellipsoid sei wieder ein Rotationsellipsoid ($A = B$), der Schwerpunkt liege aber nicht auf der Figurenaxe, sondern in der Äquatorebene ($\xi = 0$); aufserdem sei

$$2C = A\,(= B).$$

Unter diesen Annahmen gelingt es, die allgemeine Bewegung vollständig zu behandeln.

Frau Kowaleski**) drückt die Lagen- und Geschwindigkeitskoordi-

*) Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Mathematica, Bd. 12. 1888.

**) Bez. Herr F. Kötter: *Sur le cas traité par Mme. Kowalevski* etc. Acta Mathem. 17, 1893.

naten des Kreisels durch zwei Hülfsgrößen aus, welche ihrerseits mit der Zeit durch Integrale zusammenhängen, in denen die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke fünften Grades vorkommt. Solche Integrale, welche die nächste Verallgemeinerung der elliptischen Integrale darstellen, bezeichnet man als *hyperelliptische. Im Falle der Frau Kowalevski läßt sich also die allgemeine Bewegung eines unsymmetrischen Kreisels von spezieller Massenverteilung durch hyperelliptische Integrale vollständig darstellen.*

Diesem allgemeinen analytischen Schema ist die erforderliche geometrische Diskussion später durch Herrn Joukowsky*) hinzugefügt worden. Es gelingt Herrn Joukowsky den Bewegungsvorgang durch einige einfache geometrische Sätze zu beschreiben und sogar durch ein Modell zu illustrieren.

Die allgemeine Frage nach allen Fällen des schweren Kreisels, in denen außer den beiden genannten noch ein drittes algebraisches Integral vorhanden ist, ist neuerdings von Herrn R. Liouville**) in Angriff genommen worden.

Von einem anderen Standpunkte, dem der allgemeinen Lie'schen Gruppentheorie, gehen die Untersuchungen der Herren Levi-Cività***) und Liebmann†) aus. Die genannten Autoren fragen, wie die Massenverteilung (die kinetische Energie) und die Kräfteverteilung (die potentielle Energie) beschaffen sein müssen, wenn zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare erste Integrale möglich sein sollen. In diesem Falle ist man sicher, daß sich das Problem durch Quadraturen erledigen läßt.

Die Fragestellung ist hier insofern eine weitere wie in dem vorhergenannten Falle, als es sich nicht speziell um den schweren Kreisel handelt, vielmehr das Gesetz der äußeren Kraft selbst passend bestimmt werden soll. Die Untersuchung ergiebt im Ganzen 25 mögliche Fälle, von denen jedoch die meisten imaginär sind (d. h. einer mechanisch nicht realisierbaren Massenverteilung entsprechen). Daß übrigens hiermit die Frage nach der Gesamtheit der integrabeln Fälle nicht erledigt ist, zeigt schon der in der Liebmannschen Tabelle nicht enthaltene Fall der Frau Kowalevski, wo man mit Quadraturen zum Ziele gelangt, ohne daß zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare Integrale vorhanden sind.

---

*) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. IV, 1895.

**) Vgl. Acta Mathematica, Bd. XX, 1897.

***) Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. Accademia dei Lincei, 1896.

†) Vgl. oben pag. 161.

Wie man schon aus den hier gegebenen Andeutungen erkennt, gehen diese Untersuchungen von Levi-Cività und Liebmann durchaus nach der abstrakt-mathematischen Seite hin vor. —

Während es sich in den bisher aufgeführten Fällen darum handelte, die *allgemeine* Bewegung des unsymmetrischen Kreisels aufzufinden und analytisch darzustellen, wollen wir jetzt etwas eingehender über zwei Fälle *particulärer* Kreiselbewegung berichten, welche man in analytischer und geometrischer Hinsicht vollkommen beherrscht. Der eine von diesen Fällen ist von Herrn W. Hefs*) bemerkt worden; sein Studium wurde später von einer Anzahl russischer Mathematiker**) vertieft. Der andere Fall ist von Herrn O. Staude***) behandelt. In dem Hefs'schen Falle wird der Charakter der einzuleitenden Bewegung einer gewissen einfachen Bedingung unterworfen; gleichzeitig wird auch eine besondere Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes im Körper gemacht. In den von Herrn Staude untersuchten Bewegungen dagegen bleibt die Massenverteilung ganz allgemein, während der Charakter der Bewegung dafür in ausgiebigerer Weise spezialisiert wird.

Man bemerke übrigens vorab, dafs der Grad der Partikularisation in diesen beiden Fällen kein höherer ist, wie in dem Kowalevskischen oder wie im Falle des schwerelosen unsymmetrischen oder des schweren symmetrischen Kreisels. Allemal werden nämlich *drei* beschränkende Bedingungen vorangestellt; in den drei letzten Fällen beziehen sich diese Bedingungen lediglich auf die Massenverteilung, im Falle von Hefs teils auf die Massenverteilung teils auf die Bewegung, im Staudeschen Falle lediglich auf die Beschaffenheit der Bewegung.

Um in naturgemäfser Weise auf den Hefs'schen Fall der Kreiselbewegung hinzuleiten†), wollen wir uns die Frage stellen, unter welchen Umständen es bei einem allgemeinen Kreisel eintreten kann, *dafs der Impuls dauernd in einer durch den Unterstützungspunkt O gehenden, im Körper festen Ebene enthalten sei.*††) Analytisch gewandt, bedeutet dieses,

*) Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen u. s. w. Math. Ann. Bd. 37, 1890.

**) Vgl. in analytischer Hinsicht P. Nekrassoff: *Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe,* Math. Ann. Bd. 47, 1896, wo weitere Litteraturangaben zu finden sind, in geometrischer Hinsicht N. Joukowsky, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. III 1892/93.

***) *Über permanente Rotationsaxen*, Crelles Journal, Bd. 113, 1894. Mit demselben Gegenstand beschäftigt sich eine russische Arbeit von Hrn. B. Mlodzieiowski, Moskau 1894. Vgl. auch Routh, Rigid dynamics, Bd. II, art. 214.

†) Vgl. hierzu: A. Sommerfeld, Bemerkungen zum Hefs'schen Falle der Kreiselbewegung. Göttinger Nachrichten 1898.

††) Dabei schliefsen wir zunächst den Fall aus, wo der Impulsvektor im Körper absolut fest ist. Diesen Fall werden wir nachher behandeln. Er führt gerade auf die von Herrn Staude untersuchten Rotationen.

ob und wann ein in den Impulskoordinaten L, M, N lineares homogenes Integral mit konstanten Koeffizienten möglich ist.

Die Lage des Impulses zu irgend einer Zeit ergiebt sich, wenn wir den jeweils vorhandenen Impuls mit dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere zusammensetzen. Die Axe des letzteren steht auf der durch den Schwerpunkt S und den Unterstützungspunkt O gehenden Vertikalebene senkrecht. Der Endpunkt des Impulses schreitet also stets senkrecht gegen die Axe OS, die wir die „Schwerpunktsaxe" nennen wollen, fort.

Soll nun der Impuls dauernd in einer festen Ebene des Körpers liegen, so kann dieses keine andere Ebene sein, als die durch O gelegte Normalebene der Schwerpunktsaxe. Diese Ebene werde mit e bezeichnet; ihre Gleichung lautet, wenn wie früher ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes in dem Hauptträgheitskreuz XYZ bedeuten:

$$\xi L + \eta M + \zeta N = 0.$$

Dies ist bereits der Form nach das von Herrn Hefs gefundene partikuläre Integral.

Es ändert sich aber nicht nur die Lage der Impulsaxe infolge der Schwere, sondern auch die Lage des Körpers und insbesondere die Lage der Schwerpunktsaxe infolge der dem Impuls entsprechenden instantanen Rotation. Soll nun der Winkel zwischen Impuls- und Schwerpunktsaxe dauernd ein Rechter sein, so mufs nicht nur der Impuls-Endpunkt infolge der Schwerewirkung senkrecht zur Schwerpunktsaxe, sondern auch der Schwerpunkt infolge der instantanen Rotation senkrecht zur Impulsaxe fortschreiten. Dies findet aber nur dann statt, *wenn die Rotationsaxe beständig in der durch Impuls- und Schwerpunktsaxe bestimmten Ebene enthalten ist.*

Durch unsere letzte Forderung wird der Massenverteilung eine Bedingung auferlegt, die wir jetzt weiter zu untersuchen haben. Wir erinnern zu dem Zwecke an den geometrischen Zusammenhang zwischen der Lage des Drehungsvektors und der des Impulsvektors. Nach pag. 102 können wir die Richtung des Impulsvektors aus der des Drehungsvektors finden, wenn wir in einem der Durchstofsungspunkte der Drehungsaxe mit dem Trägheitsellipsoide

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

die Tangentialebene konstruieren und von O aus auf diese das Lot fällen; dieses giebt alsdann die Richtung des Impulsvektors an. In unserem Falle ist es indessen bequemer, statt mit dem Trägheitsellipsoid, dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Geschwindigkeitskoordinaten* angiebt, mit einem Ellipsoide zu operieren,

welches man das „reciproke Trägheitsellipsoid“ nennt und dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Impulskoordinaten* darstellt. Die Gleichung dieses Ellipsoides ist:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1.$$

Man erkennt dann, genau so wie pag. 101 und 102, die Richtigkeit der folgenden Konstruktion: Um die Richtung des Drehungsvektors aus der des Impulsvektors zu finden, markiere man auf dem reciproken Trägheitsellipsoide die Durchstofsungspunkte der Impulsaxe und konstruiere in einem dieser Punkte die Tangentialebene an unser Ellipsoid; dann liefert das von O auf diese Ebene gefällte Lot die Richtung des Drehungsvektors.

Wir denken uns nun in dem reciproken Trägheitsellipsoide die Schwerpunktsaxe OS gezogen und durch O ihre Normalebene e gelegt, in welcher der Impulsvektor enthalten sein soll. Diese Ebene e schneidet das Ellipsoid in einem Kegelschnitt, welcher, wie wir jetzt zeigen werden, ein *Kreis* sein mufs.

Sei nämlich P irgend ein Punkt des Kegelschnittes und t seine Tangente in P. Dann giebt OP eine mögliche Richtung der Impulsaxe an. Durch t werde ferner die Tangentialebene e' an das Ellipsoid gelegt und von O auf diese Ebene das Lot OQ gefällt, welches die zur Impulsaxe OP gehörige Richtung der Drehungsaxe bestimmt. Nach der obigen Bedingung müssen die Geraden OP, OQ und OS beständig in einer Ebene liegen. Es steht aber unsere Tangente t sowohl auf OQ wie auf OS senkrecht, da sie die Schnittlinie der auf OQ und OS in Q bez. O errichteten Normalebenen e und e' darstellt. Mithin steht t auch auf OP senkrecht. Unser Kegelschnitt hat also die Eigenschaft, dafs die Tangente in jedem seiner Punkte auf dem vom Mittelpunkte auslaufenden Radiusvektor senkrecht steht. Unser Kegelschnitt ist also in der That ein Kreis.

Damit ist die der Massenverteilung des Kreisels aufzuerlegende Bedingung gefunden. Wir können sagen: *Soll der Impulsvektor dauernd in der Normalebene e der Schwerpunktsaxe enthalten sein, so mufs diese Ebene das reciproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneiden;* oder auch: *Es mufs der Schwerpunkt auf dem in O errichteten Lote zu einer der Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides liegen.*

Dies ist die geometrische Formulierung der fraglichen Bedingung in derjenigen Form, welche ihr von Herrn Joukowsky (vgl. das Citat auf pag. 378) gegeben ist. Herr Hefs drückt dieselbe Thatsache in analytischer Formulierung aus. Wir gelangen zu der letzteren, wenn wir bemerken, dafs die beiden durch O gehenden Kreisschnittebenen

des reciproken Trägheitsellipsoides (unter der Voraussetzung $A > B > C$) durch die Gleichung gegeben werden

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) X^2 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) Z^2.$$

Da nun der Schwerpunkt (ξ, η, ζ) auf der Normalen von einer dieser Ebenen liegen soll, so folgt die Proportion

$$\xi^2 : \eta^2 : \zeta^2 = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} : 0 : \frac{1}{B} - \frac{1}{C},$$

d. h.

$$\eta = 0, \quad \xi^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \zeta^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

Dies sind die von Herrn Hefs angegebenen analytischen Bedingungen für die Möglichkeit seines Bewegungsfalles.

Der mechanische Charakter des Hefs'schen Bewegungsfalles ist ein recht einfacher. Wir werden sehen, dafs es sich dabei um die direkte Verallgemeinerung der bekannten *Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels* handelt.

Wir denken uns zu dem Zwecke den Körper anfangs in stabiler Gleichgewichtslage, also die Schwerpunktsaxe senkrecht nach unten gerichtet und den Körper ohne Rotation. Darauf drehen wir die Schwerpunktsaxe um irgend einen Winkel aus der Vertikalen heraus und überlassen den Körper dem Einflufs der Schwere, indem wir dafür sorgen, dafs zu Beginn der Bewegung entweder überhaupt keine Drehung vorhanden ist oder doch nur ein solcher Drehimpuls hinzugefügt wird, dessen Komponente um die Schwerpunktsaxe gleich Null ist, dessen Axe also in der Normalebene e der Schwerpunktsaxe liegt. Alsdann bleibt, wie wir gesehen haben, wenn noch die Bedingung erfüllt ist, dafs der Schwerpunkt auf einer der Kreisschnittnormalen des reciproken Trägheitsellipsoides liegt, der Impulsvektor dauernd in der Ebene e enthalten.

Gehen wir nun von dem unsymmetrischen zu dem symmetrischen Kreisel über, so werden wir durch eben dieses Verfahren auf die gewöhnliche oder sphärische Pendelbewegung geführt. Die Voraussetzung für das Eintreten der Pendelbewegung bestand in der That (vgl. pag. 215, Fig. 36) beim symmetrischen Kreisel darin, dafs die Komponente N des Impulses in Richtung der Figurenaxe (welche beim symmetrischen Kreisel zugleich Schwerpunktsaxe ist), anfangs gleich Null war. Und zwar ergab sich die Bewegung des „gewöhnlichen“ oder die des „sphärischen“ Pendels, je nachdem wir den ruhenden Kreisel bei irgend einer Lage der Figurenaxe ohne einen Anstofs dem Einflufs der Schwere überliefsen oder nach Hinzufügung eines rein seitlichen Anstofses, d. h. eines Drehimpulses,

dessen Axe senkrecht gegen die Figurenaxe gerichtet war und also in der Normalebene der Schwerpunktsaxe, d. i. in der Äquatorebene des symmetrischen Kreisels lag. Alsdann blieb der Impuls dauernd in der Äquatorebene enthalten, weil die Impulskomponente N ihren Anfangswert 0 dauernd beibehält. Gleichzeitig wird die Bedingung, welche wir im Falle des unsymmetrischen Kreisels hinsichtlich der Lage des Schwerpunktes hinzufügen mufsten, beim symmetrischen Kreisel von selbst erfüllt, weil hier die Kreisschnitte des reciproken Trägheitsellipsoides mit dessen Äquatorebene und die Schwerpunktsaxe mit der auf der Äquatorebene senkrechten Figurenaxe zusammenfallen.

Wir können daher sagen: *Der Hefs'sche Fall der Kreiselbewegung darf deshalb ein besonderes Interesse für sich beanspruchen, weil er die direkte Verallgemeinerung der allbekannten Pendelbewegung darstellt.* Dementsprechend werden wir im Folgenden diesen Fall kurz als den *Fall des Hefs'schen Pendels* bezeichnen.

Auch in quantitativer Beziehung besteht teilweise eine direkte Identität zwischen der Bewegung des Hefs'schen Pendels und der Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels oder, was auf dasselbe herauskommt, der Pendelbewegung des einzelnen Massenpunktes. *Wir werden nämlich zeigen, dafs der Schwerpunkt des Hefs'schen Pendels allgemein zu reden sich genau so bewegt wie der Massenpunkt eines sphärischen Pendels.*

Zum Beweise schreiben wir uns die beiden allgemein gültigen Sätze, den Satz der lebendigen Kraft und den Impulssatz $n = \text{const.}$, in geeigneter Form hin.

Wir drücken zunächst die lebendige Kraft T in zweckmäfsiger Weise durch die Impulskoordinaten aus. Dabei wählen wir zu Koordinatenaxen X, Y, Z, nicht, wie vorher, die Hauptträgheitsaxen, sondern die folgenden drei Geraden: die Z-Axe sei die Schwerpunktsaxe OS, die Y-Axe falle mit der mittleren Hauptträgheitsaxe zusammen, die X-Axe sei die zu beiden senkrechte Gerade. In diesen Koordinaten mufs der Ausdruck der lebendigen Kraft die folgende Form annehmen:

$$2T = \frac{L^2 + M^2}{B} + 2\lambda LN + \frac{N^2}{C'},$$

wo B, λ und C' durch die Massenverteilung des Körpers gegeben sind und insbesondere B die Gröfse des mittleren Hauptträgheitsmomentes bezeichnet. In der That ist ja die Fläche $2T = 1$ unser reciprokes Trägheitsellipsoid; es mufs sich also, wenn wir in der Gleichung dieser Fläche $N = 0$ setzen, die Gleichung eines Kreises ergeben. Aus diesem Grunde haben die Glieder mit L^2 und M^2 denselben Koeffizienten und fällt das Glied mit LM fort. Ferner kommt auch das Glied mit MN

in Fortfall, weil die Y-Axe als Hauptträgheitsaxe gewählt war und daher die „Trägheitsprodukte“ in Bezug auf diese Axe gleich Null sind (vgl. pag. 100).

Aus dem Ausdrucke von T ergeben sich die Komponenten des Drehungsvektors, welche in Bezug auf die Axen X, Y, Z mit p, q, r bezeichnet werden sollen, nach der allgemeinen Regel von pag. 98 in folgender Weise:

$$p = \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{L}{B} + \lambda N, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N} = \lambda L + \frac{N}{C}.$$

Bei dem Hefs'schen Pendel ($N = 0$) haben wir also speziell

$$(1) \qquad \begin{cases} 2T = \dfrac{L^2 + M^2}{B} \\ p = \dfrac{L}{B}, \quad q = \dfrac{M}{B}, \quad r = \lambda L. \end{cases}$$

Der Satz der lebendigen Kraft nimmt daher unter den zu Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen die Form an:

$$(2) \qquad \frac{L^2 + M^2}{B} + 2P\cos\vartheta = 2h,$$

Wir berechnen ferner die Vertikalprojektion n des Impulses. Bezeichnen wie pag. 17 c, c', c'' die Richtungscosinusse der Vertikalen gegen die Koordinatenaxen, so haben wir

$$(3) \qquad n = Lc + Mc' + Nc'',$$

wobei sich nach pag. 19 c, c', c'' durch die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ folgendermafsen ausdrücken:

$$c = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad c' = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Da überdies beim Hefs'schen Pendel $N = 0$ ist, so geht Gleichung (3) über in

$$(4) \qquad n = \sin\vartheta\,(L\sin\varphi + M\cos\varphi).$$

Diese Gröfse ist nach unserem allgemeinen Impulssatze eine Konstante.

Sodann ziehen wir die beiden kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 für ψ' und ϑ' heran. Setzen wir darin für p und q die Werte aus (1) ein, so lauten dieselben

$$(5) \qquad \begin{cases} B\psi'\sin\vartheta = L\sin\varphi + M\cos\varphi, \\ B\vartheta' \qquad\quad = L\cos\varphi - M\sin\varphi. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert mit Rücksicht auf (4)

$$(4') \qquad B\psi'\sin^2\vartheta = n.$$

Ferner schliefsen wir aus den beiden mit (5) identischen Gleichungen:

$$L\cos\varphi - M\sin\varphi = B\vartheta',$$

$$L\sin\varphi + M\cos\varphi = \frac{n}{\sin\vartheta},$$

indem wir sie bez. mit 1 und $-i$ multiplizieren und addieren:

$$(L - iM)\,e^{-i\varphi} = \frac{B\sin\vartheta\vartheta' - in}{\sin\vartheta}, \tag{6}$$

und indem wir sie quadrieren und addieren

$$L^2 + M^2 = \frac{B^2\sin^2\vartheta\vartheta'^2 + n^2}{\sin^2\vartheta}. \tag{7}$$

Mit dem letzten Werte gehen wir in die Gleichung (2) der lebendigen Kraft hinein. Benutzen wir die Abkürzung $u = \cos\vartheta$, so erhalten wir

$$(Bu')^2 = 2hB(1-u^2) - 2Pu(1-u^2) - n^2. \tag{8}$$

Gleichzeitig geht Gleichung (6) über in

$$B\psi' = \frac{n}{1-u^2}. \tag{9}$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) enthalten bereits den Beweis der vorangestellten Behauptung. Sie sind nämlich mit den Gleichungen der Pendelbewegung identisch, welche man aus den allgemeinen Integralgleichungen (4), (6), (7) der symmetrischen Kreiselbewegung von pag. 222 erhält, wenn man dort $N = 0$ setzt (und übrigens, um auch die Konstanten in Übereinstimmung zu bringen, A mit B vertauscht).

Durch die Winkel ψ und ϑ ist die Bewegung der Schwerpunktsaxe völlig bestimmt. Diese kann also nach den Gleichungen (8) und (9) als bekannt angesehen werden. Um die Bewegung des Hefs'schen Pendels völlig zu beherrschen, müssen wir nur noch die Drehung des Körpers um die Schwerpunktsaxe untersuchen. Diese ist nach Gleichung (1) durch $r = \lambda L$ gegeben. Es bietet sich nun zum Studium dieser Gröfse r der folgende elegante Weg dar.

Wir wissen, dafs der Impuls J dauernd in der Ebene e, der Normalebene der Schwerpunktsaxe, enthalten ist. In dieser Ebene denken wir uns in Gaufsischer Weise die komplexe Variable

$$J = L + iM$$

ausgebreitet. Das Verhalten dieser Variabeln wird dabei durch die Eulerschen Gleichungen reguliert, welche sich ohne Weiteres in eine einzige Differentialgleichung für unsere komplexe Variable zusammenfassen lassen.

Da unsere Axen X, Y, Z keine Hauptträgheitsaxen sind, benutzen wir diejenige Form der Eulerschen Gleichungen, welche für jedes beliebige Axenkreuz gilt, d. h. die Gleichungen (3′) von pag. 141:

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \quad rM - qN + \Lambda, \\ \frac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \frac{dN}{dt} = \quad qL - pM + \mathsf{N}, \end{cases}$$

Hier haben wir für Λ, M, N die Komponenten des Schweremomentes nach unseren Koordinatenaxen X, Y, Z einzusetzen. Die Gröfse dieses Momentes ist $P \sin \vartheta$, seine Richtung fällt in die Knotenlinie. Da letztere mit der X-Axe den Winkel φ, mit der Y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschliefst (vgl. Fig. 3 von pag. 18), so haben wir

$$\begin{aligned} \Lambda &= \quad P \sin\vartheta \cos\varphi = \quad P\sqrt{1-u^2}\cos\varphi, \\ \mathsf{M} &= -P \sin\vartheta \sin\varphi = -P\sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \\ \mathsf{N} &= \quad 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) nehmen daraufhin, wenn wir noch für p, q, r die Werte aus (1) einsetzen und überdies, wie es dem Hefs'schen Falle entspricht, $N = 0$ machen, die Form an:

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \quad \lambda LM + P\sqrt{1-u^2}\cos\varphi, \\ \frac{dM}{dt} = -\lambda L^2 - P\sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \end{cases}$$

während die dritte Gleichung identisch erfüllt ist.

Die Gleichungen (11) multiplizieren wir nun mit 1 und i und addieren sie; dann folgt

$$(12)\qquad \frac{dJ}{dt} + i\lambda LJ - P\sqrt{1-u^2}\, e^{-i\varphi} = 0.$$

Hier schreiben wir noch

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}(L + iM + L - iM) = \tfrac{1}{2}\left(L + iM + \frac{L^2+M^2}{L+iM}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(J + \frac{L^2+M^2}{J}\right), \end{aligned}$$

und ersetzen $L^2 + M^2$ nach dem Satze der lebendigen Kraft (Gl. (2)) durch $2B(h - Pu)$. In ähnlicher Weise ergiebt sich aus (6)

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{L - iM} = \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{J}{L^2+M^2} \\ &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{J}{2B(h-Pu)}. \end{aligned}$$

Mithin geht Gleichung (12) in die definitive Form über:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{i\lambda}{2} J^2 + \frac{P}{2B} \frac{Bu' + in}{h - Pu} J + i\lambda B(h - Pu) = 0. \tag{13}$$

Es ist dieses eine sogenannte *Riccatische Gleichung*, eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades. Die Koeffizienten dieser Gleichung können als bekannte Funktionen von t angesehen werden. Durch Gleichung (8) ist nämlich $\frac{du}{dt}$ als Quadratwurzel aus einem Polynom dritten Grades in u:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}$$

dargestellt. Hieraus folgt t als ein elliptisches Integral:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Umgekehrt ist also auch u und ebenso u' als Funktion von t, und zwar, wie wir im nächsten Kapitel (vgl. § 3) sehen werden, als sogenannte doppeltperiodische Funktion von t bestimmt.

Schliefslich ist es bequem, von unserer Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ersten Grades überzugehen, wie solches bei der Behandlung Riccatischer Gleichungen allgemein üblich ist. Dies gelingt in unserem Falle durch die Substitution

$$J = \frac{i\lambda}{2} \frac{d \log w}{dt},$$

welche für den in Rede stehenden Übergang typisch ist. In der neuen komplexen Variabeln w geschrieben, lautet unsere Differentialgleichung dann:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{P}{2B} \frac{Bu' + in}{h - Pu} \frac{dw}{dt} + i\lambda B(h - Pu)w = 0. \tag{14}$$

Wir sind somit zu einer sogenannten *linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* gelangt. An diese hat die eingehendere analytische Untersuchung anzuknüpfen. Wir können dies nicht näher ausführen, sondern verweisen in der Hinsicht auf die oben citierte Arbeit von Herrn Nekrassoff.

Ohne Benutzung der Gleichung (14) auf rein-geometrischem Wege ist der Hefs'sche Fall von Herrn Joukowsky in der oben genannten Note sehr eingehend studiert und durch ein Modell überzeugend erläutert worden. Diesem Autor verdankt man auch neben anderen schönen Resultaten die mitgeteilten Sätze über die Schwerpunktsbewegung des Hefs'schen Pendels.

Wir kommen nun zu dem zweiten der oben erwähnten partikulären Bewegungsfälle, dem von Hrn. Staude behandelten. Herr Staude

findet, dafs bei einem schweren Kreisel von beliebiger Massenverteilung allemal einfach unendlich viele Bewegungen angegeben werden können, die aus einer gleichförmigen Rotation um eine im Körper feste, vertikal gestellte Axe bestehen.

Wir wollen das Resultat von Hrn. Staude geometrisch aus der Impulstheorie ableiten. *Es handelt sich um die Frage, welche Axen, vertikal aufgerichtet, als permanente Drehaxen des allgemeinen Kreisels fungieren können.*

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Lage des Impuls-Endpunktes im Körper. Soll der Drehungsvektor nach Richtung und Gröfse im Raume und also auch im Körper konstant bleiben, so mufs auch der Impuls seine Gröfse sowie seine Lage gegen den Kreisel beibehalten, weil ja der Vektor des Impulses aus dem Drehungsvektor in eindeutiger Weise abgeleitet werden kann. Das Kriterium für die Möglichkeit der einfachen Rotation um eine vertikale Axe wird also dieses sein, *dafs der Endpunkt des Impulsvektors im Körper eine feste Lage hat.* (Im Raume beschreibt dieser Punkt alsdann natürlich einen Kreis um die Vertikale.)

Der Endpunkt des Impulsvektors heifse J, der des Rotationsvektors R. Die eventuelle Lagenänderung des Punktes J gegen den Körper rührt nun, wie schon beim Hefs'schen Pendel bemerkt, von zwei Umständen her, von der Schwerewirkung einerseits und von der instantanen Drehung des Kreisels andrerseits. Diese beiden Umstände müssen sich, wenn anders die Bewegung die vorausgesetzte Beschaffenheit haben soll, gegenseitig kompensieren.

Wegen der Schwerewirkung wandert der Punkt J, wie oben betont wurde, im Raume gleichzeitig senkrecht zur Schwerpunktsaxe OS und zur Vertikalen oder, wie wir im vorliegenden Falle auch sagen können, gleichzeitig senkrecht zu OS und OR fort. Wegen der instantanen Rotation des Kreisels würde der Punkt J, wenn er im Raume fest wäre, relativ zu dem Körper auf einem Kreise um die Vertikale herumgeführt; der Punkt J wandert also wegen dieses Umstandes gleichzeitig senkrecht gegen OR und OJ. Sollen sich beide Verrückungen aufheben, so müssen vor allem ihre Richtungen übereinstimmen. Es müssen also die drei Geraden OR, OS und OJ ein gemeinsames Lot besitzen, d. h. *die drei genannten Richtungen müssen in einer Ebene liegen.* Wir sind somit auf dieselbe Bedingung wie im Falle des Hefs'schen Pendels (vgl. pag. 379) geführt. Die Folgerungen aber, die wir jetzt hieraus ziehen, sind dem veränderten Ausgangspunkte entsprechend von den früheren verschieden. Während die Forderung, dafs die Axen OR, OS und OJ in einer Ebene liegen sollen, beim Hefs'schen Pendel nur durch

Spezialisierung der Massenverteilung zu erfüllen war, läfst sich dieselbe Forderung jetzt, da die Punkte R und J im Körper fest liegen, bei beliebiger Massenverteilung durch geeignete Auswahl von R befriedigen.

Analytisch besagt unsere Bedingung, wenn wir wie gewöhnlich mit p, q, r bez. L, M, N die Koordinaten von R und J im Hauptträgheitskreuze bezeichnen, dafs die Gleichung bestehen mufs:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ L, & M, & N \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Wir fassen diese Gleichung jetzt als eine Bedingung für die Lage der Drehungsaxe auf. Drücken wir noch L, M, N in bekannter Weise durch p, q, r aus, so sehen wir, dafs die als permanente Rotationsaxen in Frage kommenden Geraden auf einem *Kegel zweiten Grades* liegen müssen, dessen Gleichung wir schreiben können:

$$(A-B)\xi pq + (B-C)\xi qr + (C-A)\eta rp = 0. \tag{16}$$

Geometrisch ist ein Kegel zweiten Grades bestimmt, wenn wir fünf Strahlen desselben kennen. Solche fünf Strahlen sind in unserem Falle leicht gefunden. Sicherlich liegen die drei Richtungen OR, OJ, OS allemal dann in einer Ebene, wenn zwei von ihnen zusammenfallen. Sollen OR und OJ zusammenfallen, so ist ihre gemeinsame Richtung eine Hauptträgheitsaxe. Also liegen die drei Hauptträgheitsaxen auf unserem Kegel zweiten Grades. Soll OJ mit OS identisch werden, so liegt OR in einer ganz bestimmten Richtung OS', welche mit Hülfe des Trägheitsellipsoides leicht konstruiert werden kann und welche durch den Punkt mit den Koordinaten $\frac{\xi}{A}, \frac{\eta}{B}, \frac{\zeta}{C}$ hindurchgeht. Also liegt auch diese Gerade und ebenso natürlich die Schwerpunktsaxe selbst auf unserem Kegel. Unser Kegel kann also aus den drei Hauptträgheitsaxen, sowie den Geraden OS und OS' konstruiert werden; *er ist bekannt, wenn die Massenverteilung des Körpers gegeben ist.*

Aufser der *Richtung* der beiden oben genannten Teilverrückungen des Punktes J mufs aber auch die *Gröfse* dieser Verrückungen übereinstimmen und ihr Sinn der entgegengesetzte sein, wenn unsere Rotationsaxe permanent sein soll. Berücksichtigen wir dieses, so ergiebt sich die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper um die fragliche Axe rotieren kann. Durch die Schwerewirkung wird dem Punkte J, wie wir wissen, in der Zeit dt die Verrückung

$$P \sin \vartheta \, dt \tag{17}$$

erteilt. Infolge der instantanen Rotation, welche, im Sinne des Uhr-

zeigers gerechnet, die Winkelgeschwindigkeit Ω besitzen möge, wird J mit der Geschwindigkeit

$$-\Omega\,|J|\sin\psi$$

relativ gegen den Körper fortbewegt, wo ψ den Winkel zwischen Rotations- und Impulsaxe, $|J|$ die Länge des Impulses, mithin $|J|\sin\psi$ den Abstand des Punktes J von der Vertikalen bedeutet. Hieraus ergiebt sich während der Zeit dt die Verrückung

$$-\Omega\,|J|\sin\psi\,dt. \tag{17'}$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (17) und (17′) folgt die weitere Bedingungsgleichung

$$\Omega\,|J|\sin\psi = P\sin\vartheta. \tag{18}$$

Haben wir nun irgend eine Erzeugende unseres Kegels als Rotationsaxe ausgesucht und mit ihrem einen Ende vertikal nach oben gestellt, so ist die Lage des zugehörigen Impulses J (d. h. der Winkel ψ) bestimmt und unabhängig von der dem Kreisel zu erteilenden Drehgeschwindigkeit Ω. Die Gröfse des Impulses dagegen hängt nach der pag. 101 beschriebenen Konstruktion von der Gröfse der Drehung ab und zwar wird einfach $|J| = \lambda\Omega$, wo λ einen positiven, von Ω unabhängigen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Gleichung (18) geht daher über in

$$\lambda\Omega^2\sin\psi = P\sin\vartheta. \tag{18'}$$

Aus dieser Gleichung ist Ω^2 für jede Axe unseres Kegels zu bestimmen.

Dabei kann sich für Ω^2 ebensowohl ein positiver wie ein negativer, d. h. für Ω ein reeller wie ein imaginärer Wert ergeben. Die Strahlen (oder richtiger die Halbstrahlen) unseres Kegels zerfallen so in zwei Klassen, in „zulässige“ und „unzulässige“ Drehungsaxen. *Nur die „zulässigen“ Halbstrahlen, deren Ω reell ausfällt, können senkrecht in die Höhe gerichtet, permanente Axen wirklicher Drehungen sein.*

Zunächst sieht man leicht, dafs zwei entgegengesetzte Halbstrahlen unseres Kegels, zu Rotationsaxen gemacht, entgegengesetzte Vorzeichen von Ω^2 geben. In der That wird beim Übergang von einem Halbstrahl zu dem entgegengesetzten auch die Richtung des Impulses mit der entgegengesetzten Richtung vertauscht. Es bleibt also auch $\sin\psi$ ungeändert, während die Schwerewirkung $P\sin\vartheta$ im Vorzeichen umgekehrt wird. *Ist also der eine Halbstrahl eine zulässige, so ist der entgegengesetzte eine unzulässige Axe.* (Eine Ausnahme würde nur bei den besonderen Werten $\Omega^2 = 0$ und ∞ eintreten.)

Sodann denken wir uns den zur Rotationsaxe bestimmten Halbstrahl successive längs der einen der beiden Kegelhälften entlang geführt. Das Vorzeichen von Ω^2 ändert sich nur, wenn $\sin\vartheta$ oder

$\sin\psi$ sich im Vorzeichen umkehren. Ersteres tritt ein, wenn wir den Halbstrahl die Schwerpunktsaxe OS, letzteres, wenn wir ihn eine der drei Hauptträgheitsaxen passieren lassen. *Hiernach wird die eine sowie die andere der Kegelhälften durch die Hauptträgheitsaxen und die Schwerpunktsaxe in vier Teilgebiete zerlegt, welche abwechselnd zulässige und unzulässige Drehungsaxen enthalten.*

Was die Übergangslagen ($\psi = 0$ und $\vartheta = 0$) betrifft, so wird nach Gleichung (18′) im ersteren Falle $\Omega = \infty$, im letzteren $\Omega = 0$. Die Rotation Null bei aufrechter Schwerpunktsaxe bedeutet natürlich nichts anderes wie die (stabile oder labile) *Gleichgewichtslage* des Körpers. Die unendlichen Geschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsaxen leuchten ebenfalls ein.

Die verschiedenen Ausartungen des Kegels (16) sollen hier nicht vollständig besprochen werden. Wir verweisen in der Hinsicht auf die Staudesche Originalarbeit und erinnern übrigens, was den symmetrischen Kreisel betrifft, an die Bemerkungen von pag. 335. Wir sahen dort, dafs beim symmetrischen Kreisel nicht ∞^1, sondern ∞^2 permanente Drehungsaxen möglich sind, von denen die zulässigen, je nachdem ein verlängerter oder ein abgeplatteter Kreisel vorlag, das „untere“ oder „obere Halbbündel“ ausfüllten. Dementsprechend wird unsere obige Gleichung (16) im Falle des symmetrischen Kreisels ($A = B$, $\xi = \eta = 0$) identisch erfüllt. Dafs insbesondere die Figurenaxe bei jedem Wert von Ω als Drehungsaxe permanent bleibt, geht aus (18) hervor, indem diese Gleichung bei aufrechter Figurenaxe (wegen $\vartheta = 0$, $\psi = 0$) identisch befriedigt wird. —

Zum Schlufs wollen wir andeuten, wie man unserem Dafürhalten nach mit Benutzung der bisher gelösten Spezialfälle zu einer allgemeinen qualitativen Kenntnis der Bewegung des unsymmetrischen Kreisels fortschreiten könnte.

Durch die Untersuchung der genannten Spezialfälle, sowie durch die Kenntnis der symmetrischen Kreiselbewegung sind sozusagen einzelne Wege in das unbekannte Gebiet des allgemeinen Kreisels gebahnt, welche dieses in verschiedenen Richtungen durchqueren. Man sollte nun zunächst versuchen, von diesen gangbaren Strafsen aus, wenn auch nur ein kleines Stückchen, seitlich vorzudringen, indem man statt eines symmetrischen einen nahezu symmetrischen, statt eines Kowalevskischen einen nahezu Kowalevskischen Kreisel u. s. w. untersucht. Die Behandlung dieser Nachbarfälle läfst sich ohne Frage durch geeignete Näherungsprozesse mit beliebiger Genauigkeit bewerkstelligen, falls die Abweichung von den bekannten Fällen nicht zu grofs ist und man die Zeit auf ein begrenztes Intervall beschränkt. Dabei ist es keineswegs geboten, die

Näherungsmethode allemal in einer Potenzentwickelung zu suchen, z. B. bei dem nahezu symmetrischen Kreisel in einer Potenzentwickelung nach der als klein vorausgesetzten Differenz der Hauptträgheitsmomente A und B. Vielmehr wird jedesmal eine dem Falle eigentümliche und adäquate Näherungsmethode zu benutzen sein.

Wenn wir so ein Urteil über den Sinn gewonnen haben, in welchem eine kleine Abweichung von den lösbaren Spezialfällen wirksam ist, würde es weiter darauf ankommen, die Verbindung herzustellen zwischen den verschiedenen bekannten Bewegungen bez. zwischen ihren Nachbarfällen. Hierbei hätte man eine Art *Interpolation* vorzunehmen; man hätte Zwischenfälle der Bewegung einzuschalten unter der im allgemeinen fraglos zutreffenden Annahme eines kontinuierlichen Überganges zwischen je zwei Bewegungen. Als Schema für dieses Interpolationsverfahren können wir unsere anschauliche Behandlung des symmetrischen Kreisels im Anfange des vorigen Kapitels empfehlen.

Kapitel VI.

Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Funktionen.

§ 1. Die Riemannsche Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Während unser Hauptinteresse bisher auf das geometrische und mechanische Verständnis der Kreiselbewegung gerichtet war, soll in diesem Kapitel der Ton auf die analytische Seite unseres Problems gelegt werden. Es ist unvermeidlich, dafs die diesbezüglichen Entwicklungen abstrakter ausfallen und von der Wirklichkeit des mechanischen Vorganges zunächst weiter abzuliegen scheinen, wie die früheren, selbst wenn wir, was der Kürze halber geschehen mufs, auf eine durchgängige Strenge und Vollständigkeit der funktionentheoretischen Betrachtungen Verzicht leisten. Im Folgenden soll die Mathematik nicht ausschliefslich dem Interesse der Mechanik dienen, sondern es soll gleichzeitig die Mechanik zur Veranschaulichung einer mathematischen Theorie, der Lehre von den elliptischen Funktionen, herangezogen werden.

Dafs dieses möglich ist und dafs eine *gegenseitige* Befruchtung zwischen Anwendung und Theorie thatsächlich stattfindet, ist ein sehr bemerkenswerter Umstand, auf den wir zunächst die Aufmerksamkeit lenken möchten.

Ohne Frage ist es vom mechanischen Standpunkte aus natürlicher, die Bewegung dadurch zu beschreiben, dafs wir die Lagenkoordinaten des Kreisels, zunächst also etwa die Gröfse u, in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darstellen, statt wie bisher die Zeit und die übrigen Lagenkoordinaten als Funktionen von u aufzufassen. Wenn wir uns so aus mechanischen Gesichtspunkten heraus die Aufgabe stellen, die funktionale Abhängigkeit zwischen t und u „umzukehren“, so werden wir höchlichst überrascht sein, zu sehen, wie dieselbe Aufgabe auch vom rein mathematischen Standpunkte aus das gröfste Interesse besitzt. Auf unserem bisherigen Niveau, wo wir t als Funktion von u berechneten, bewegen sich die älteren Arbeiten über die *Theorie der elliptischen Integrale*, namentlich die von Legendre. Der grofse Fortschritt aber, welcher auf diesem Gebiet durch Abel und Jacobi erzielt worden ist, beruht

wesentlich auf dem eben angedeuteten *Umkehrgedanken*, auf dem *Übergange von den elliptischen Integralen zu den sogenannten elliptischen Funktionen*. Wir begegnen da einem merkwürdigen Zusammenwirken von Theorie und Praxis, sozusagen einer *prästabilierten Harmonie* zwischen reiner und angewandter Mathematik, die sich zum Wohle beider in der Geschichte unserer Wissenschaft fortgesetzt geltend gemacht hat.

Unter demselben Gesichtspunkte wollen wir sodann die Bedeutung unserer Drehungsparameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die folgenden Entwickelungen betonen. Diese Gröfsen waren ursprünglich im kinematischen Interesse eingeführt, um die Formeln der Drehungstransformation nach Möglichkeit zu vereinfachen. Es wird sich nun im Folgenden zeigen, dafs dieselben Gröfsen eine mindestens ebenso grofse Vereinfachung für die analytische Weiterführung des Problems mit sich bringen, und dafs gerade diese Parameter es sind, welche man, ausgehend von der Theorie der elliptischen Funktionen, vor allen anderen bevorzugen müfste.

Andererseits wird durch die elliptischen Funktionen auch die praktische Seite unseres Problems gefördert, insofern wir (vgl. § 6) aus dieser Theorie die vollständigsten und einfachsten Formeln zur numerischen Berechnung der Kreiselbahnen entnehmen werden, welche uns bei nicht übertriebener Genauigkeit mit wenigen trigonometrischen Gliedern auszukommen gestatten.

Der erste Schritt zur analytischen Vertiefung unseres Problems ist der, dafs wir den vorkommenden Gröfsen prinzipiell *komplexe Werte* beilegen. Es gilt hier, wie in so vielen Fällen, die Bemerkung: dafs analytische Verhältnisse, die bei der Beschränkung auf das Reelle unübersichtlich scheinen, sich sofort aufklären, wenn wir in das komplexe Gebiet übergehen.

Wir setzen also

$$u = u_1 + iu_2$$

und stellen die Werte von u nicht mehr auf einer Geraden, sondern nach dem Vorgange von Gaufs (bez. Argand) in einer Ebene dar. Da man in der Funktionentheorie $u = \infty$ als *einen* Wert ansieht, gleichviel ob es sich um ein Unendlichwerden des reellen oder des imaginären Bestandteils oder beider gleichzeitig handelt, so fafst man bekanntlich auch das Unendlich-Ferne der Gaufsischen Ebene als *einen einzelnen Punkt**) auf.

---

*) Vgl. z. B. H. Burkhardt: *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen*, Leipzig 1897. Wir verweisen den Leser auf dieses Buch bezüglich aller derjenigen funktionentheoretischen Angaben, welche im Text nicht ausführlich genug erläutert werden konnten.

Hierdurch erreicht man, dafs zwischen den Werten von u und den Punkten der Ebene ein eindeutig-umkehrbares Entsprechen stattfindet.

Die Vorstellung der *Gaufsischen Ebene* genügt aber für unsere Zwecke noch nicht; wir müssen dieselbe erweitern zu dem Bilde einer sogenannten *Riemannschen Fläche.*

Wir haben ja bei unseren Integralausdrücken die beiden Gröfsen u und $\sqrt{U}$ immer gleichzeitig zu betrachten. Zu jedem Werte von u gehören zwei Werte von $\sqrt{U}$, welche sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Um diese gut auseinander zu halten, werden wir uns die Gaufsische Ebene *doppelt überdeckt* denken, ebenso wie wir uns schon früher die u-Axe doppelt zeichneten. Je nachdem wir $\sqrt{U}$ mit dem einen oder anderen Vorzeichen rechnen, befinden wir uns dann in dem einen oder in dem entsprechenden Punkte des anderen Exemplares der u-Ebene. Wir unterscheiden die beiden Exemplare als *oberes* und *unteres Blatt.*

Die beiden entgegengesetzten Werte von $\sqrt{U}$ fallen nur dann zusammen, wenn $U = 0$ oder $U = \infty$ wird. Die Stellen, wo dieses eintritt, haben wir schon im vierten Kapitel kennen gelernt. Es sind die auf der reellen Axe gelegenen Punkte $u = e, e', e''$ und ∞. Denken wir uns an diesen vier Stellen die beiden Blätter zusammengeheftet, so gehört jetzt zu jedem Paare entsprechender Werte von u und $\sqrt{U}$ nur ein Punkt der Doppelebene und umgekehrt. Die Punkte der Doppelebene und die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ sind also in derselben Weise *ein-eindeutig* zusammengeordnet, wie die Punkte der Gaufsischen Ebene und die Werte von u.

Die Art des Zusammenhanges zwischen dem oberen und dem unteren Blatt an den Stellen e, e', e'' und ∞ bedarf dabei allerdings noch der besonderen Untersuchung. Man darf nicht, wie es wohl am nächsten liegt, die beiden Blätter in jenen vier Punkten einzeln aneinander befestigen und im Übrigen schlicht übereinander herlaufen lassen, wenigstens dann nicht, wenn man verlangt, dafs die Zuordnung zwischen den Punkten der Doppelebene und den Wertepaaren $(u, \sqrt{U})$ eine *kontinuierliche* sein soll.

Betrachten wir z. B. den Punkt $u = e$ und umschreiten wir ihn auf einem kleinen Kreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Die vorher genannte Befestigungsart der beiden Blätter wäre nur dann angezeigt, wenn wir, mit einem Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ beginnend, nach der Durchlaufung des Kreises zu demselben Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ zurückkehren würden. Wir werden aber durch die folgende Betrachtung zeigen, dafs wir in dem entgegengesetzten Wertepaare $(u, -\sqrt{U})$ endigen.

Analytisch bedeutet die Durchlaufung unseres Kreises, dafs wir

$$u - e = \varrho e^{i\varphi}$$

setzen und bei festgehaltenem ϱ den Winkel φ um 2π wachsen lassen. Nun haben wir

$$U = c(u-e)(u-e')(u-e''), \quad c = \frac{2P}{A}$$

und also

$$\sqrt{U} = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} \sqrt{c(u-e')(u-e'')}. \tag{1}$$

Hier können wir uns ϱ so klein gewählt denken, dafs in der letzten Gleichung die Gröfsen unter der Quadratwurzel bei Umschreitung des Kreises sich beliebig wenig verändern. Insbesondere soll unser Kreis in seinem Innern natürlich keinen der Punkte e', e'' enthalten. Lassen wir jetzt φ um 2π wachsen, so ändert $\sqrt{U}$ sein Vorzeichen. Wir gelangen also bei unserem Umlauf von dem einen Blatte in das andere.

Um dieser Thatsache Rechnung zu tragen, müssen wir uns folgende Vorstellung über den Zusammenhang der beiden Blätter bilden. Wir müssen uns denken, dafs von dem Punkte $u = e$ eine Linie ausläuft, bei deren Überschreitung man aus dem einen in das andere Blatt hineingelangt und dafs sich beide Blätter längs dieser Linie *durchdringen*. Dasselbe gilt von den Punkten e', e'', ∞. Dementsprechend beschreiben wir den Zusammenhang der beiden Blätter am besten folgendermafsen: Wir denken uns die beiden Blätter zunächst schlicht übereinander gelegt und schneiden sie beide längs der reellen Axe etwa von e bis e' und von e'' bis ∞ auf. Die freien Kanten heften wir wechselweise zusammen, so dafs immer eine Kante des oberen mit der gegenüberliegenden Kante des unteren Blattes verbunden wird. Dann haben wir in der That den gewünschten Zusammenhang.

Allerdings müssen wir hierbei die nicht ganz bequeme Thatsache mit in Kauf nehmen, dafs sich nach der Zusammenheftung wie gesagt die beiden Exemplare der u-Ebene längs der Strecken ee' und $e''\infty$ gegenseitig durchdringen. Man bemerke aber, dafs diese Unvollkommenheit des geometrischen Bildes nur durch die Beschränktheit unserer dreidimensionalen Raumvorstellung bedingt wird. Hätten wir eine Dimension mehr zur Verfügung, so könnten wir die in der erforderlichen Weise zusammengehefteten Blätter ohne Durchdringung so nebeneinander herlaufen lassen, dafs sie lediglich die Verzweigungspunkte gemeinsam haben.

Die Durchdringungskurven, auf deren Gestalt es nicht wesentlich ankommt — bei unserem Verfahren sind es Stücke gerader Linien — nennen wir *Verzweigungslinien*, sowie wir ihre Endpunkte, die Stellen e, e', e'', ∞, bereits früher als *Verzweigungspunkte* bezeichneten. Das Ge-

samtbild der hiermit gewonnenen geometrischen Vorstellungen heifst nach seinem Schöpfer eine *Riemannsche Fläche.* Wir sprechen kurz von der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Wir haben uns jetzt genauer auf unserer Riemannschen Fläche zu orientieren. Zunächst setzen wir über die gegenseitige Lage von e, e', e'' fest, dafs

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < +\infty$$

sei, was nach Figur 38 von pag. 226 der Annahme $P > 0$ entspricht. Sodann werden wir, ähnlich wie man die Gaufsische Ebene je nach dem Vorzeichen des imaginären Teiles von u in eine positive und eine

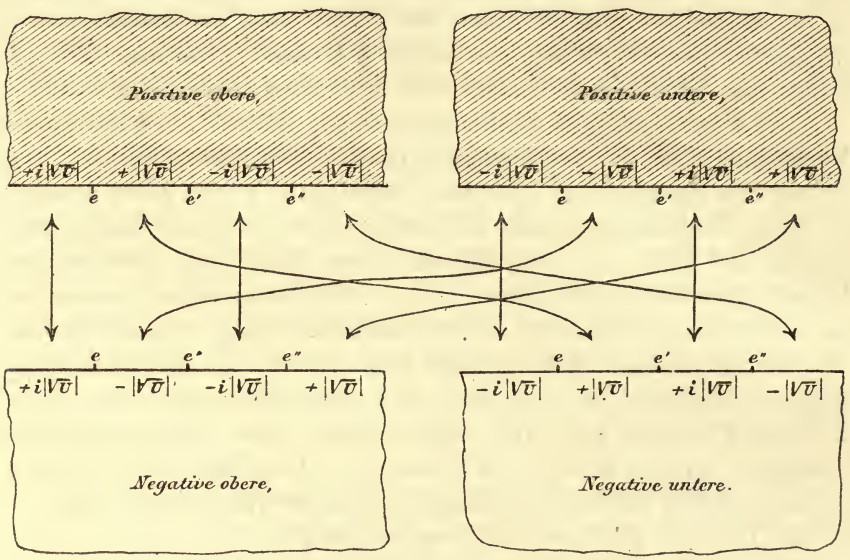


Fig. 59.

negative Halbebene zerlegt, auf unserer Riemannschen Fläche vier solche Halbebenen unterscheiden, welche wir in Fig. 59 schematisch aufzeichnen und benennen wollen. Die beiden positiven Halbebenen sollen dabei durch Schraffierung von den beiden negativen kenntlich gemacht werden. Die Pfeile deuten an, wie die einzelnen Stücke der reellen Axe in unseren vier Halbebenen nach der Zusammenheftung aneinander hängen.

Wir tragen in diesen Figuren die Werte von $\sqrt{U}$ längs der reellen Axe ein, wobei wir in einem Punkte der Fläche das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ nach Willkür wählen können. Für alle übrigen Stellen ist alsdann $\sqrt{U}$ durch die Forderung der Kontinuität eindeutig bestimmt. Wir wollen etwa für irgend einen Punkt zwischen e und e', wo ja $\sqrt{U}$ etwas

Reelles bedeutet, festsetzen, dafs der positive Wert der Quadratwurzel der positiven oberen Halbebene zugehören soll. Dasselbe Vorzeichen gilt dann überhaupt zwischen e und e' an der Grenze der positiven oberen Halbebene. Wir schreiben also hier den Wert $+|\sqrt{U}|$ an. Denselben Wert erhält die negative untere Halbebene zwischen e und e', weil ja diese längs ee' mit der positiven oberen Halbebene zusammenhängen sollte. Der Wert $-|\sqrt{U}|$ kommt alsdann dem Stücke ee' der negativen oberen und positiven unteren Halbebene zu.

Um entsprechende Angaben für die anderen Teile der reellen Axe machen zu können, gehen wir z. B. um den Punkt e in der positiven oberen Halbebene auf einem Halbkreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herum, wobei wir von einem Punkte zwischen e und e' ausgehend in einen Punkt zwischen $-\infty$ und e gelangen. Nach Gleichung (1) nimmt $\sqrt{U}$ hierbei den Faktor $e^{\frac{i\pi}{2}} = +i$ an. Wir schreiben also an die reelle Axe zwischen $-\infty$ und e im positiven oberen Blatte, ebenso wie in dem mit ihm zusammenhängenden negativen oberen Blatte, den Wert $+i|\sqrt{U}|$ an. In solcher Weise fortfahrend vervollständigen wir die Benennung der einzelnen Intervalle.

Der Vergleich mit Fig. 38 ($P > 0$) zeigt, dafs unsere früheren Angaben mit den jetzigen Ergebnissen für die Begrenzungen der positiven oberen Halbebenen übereinstimmen. Die frühere Figur stellt einfach einen Schnitt dar, welcher parallel zur reellen Axe, ein wenig nach der Seite der positiven Halbebenen verschoben, durch die Riemannsche Fläche hindurchgelegt ist. Der Unterschied ist nur der, dafs die hinzugeschriebenen Werte von $\sqrt{U}$ früher bei der Beschränkung auf reelle Variable als willkürliche Festsetzungen erschienen, während sie jetzt nach willkürlicher Festlegung des Vorzeichens in einem Punkte der Fläche für alle übrigen mit Notwendigkeit folgen.

§ 2. Verhalten der elliptischen Integrale auf der Riemannschen Fläche.

Wir müssen nun das Verhalten der elliptischen Integrale auf unserer Riemannschen Fläche prüfen. Dabei werden wir im Allgemeinen als bekannt voraussetzen, was man unter einem auf komplexem Wege geführten Integral versteht; auch werden wir gelegentlich den Cauchyschen Satz nicht entbehren können, welcher aussagt, unter welchen Umständen zwei verschiedene Integrationswege, die denselben Anfangs- und Endpunkt verbinden, den gleichen Integralwert ergeben.*)

*) Vgl. H. Burkhardt, l. c. § 35.

Wir betrachten zunächst das „Integral erster Gattung“

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$$

und wollen zeigen, dafs ihm die von Riemann herrührende Bezeichnung eines *„überall endlichen Integrales“* zukommt.

Wie bekannt, kann ein Integral bei endlicher Länge des Integrationsweges nur dann unendlich werden, wenn der Weg über eine Unendlichkeitsstelle des Integranden herüber erstreckt wird und die Ordnung des Unendlichwerdens nicht kleiner ist als 1. In unserem Falle sind die Unendlichkeitsstellen des Integranden mit den Nullstellen von U, d. h. mit den Verzweigungspunkten e, e', e'' identisch; und zwar beträgt die Ordnung des Unendlichwerdens im Integranden $\frac{1}{2}$. Infolgedessen wird unser Integral endlich bleiben, auch wenn wir seine obere oder untere Grenze mit einer dieser Stellen zusammenfallen lassen.

Ferner ist aus der Integralrechnung bekannt, dafs ein Integrationsweg ins Unendliche ausgedehnt werden kann, ohne dafs das Integral seinen endlichen Sinn verliert, wenn der Integrand im Unendlichen von höherer als der ersten Ordnung verschwindet. In unserem Falle verschwindet aber $\sqrt{U}$ für $u = \infty$ wie $u^{-3/2}$. Mithin bleibt unser Integral auch im Unendlichen endlich.

Wenn wir also irgend einen Punkt auf der Riemannschen Fläche als untere und irgend einen als obere Grenze unseres Integrales wählen und beide durch irgend einen Weg verbinden, welcher die Verzweigungspunkte eventuell eine (endliche) Anzahl von Malen umschlingen kann, so hat das so entstehende Integral allemal einen endlichen Wert. *Die Bezeichnung „überall endliches Integral“ ist danach gerechtfertigt.*

Insbesondere wollen wir diejenigen Integralwerte betrachten, welche einem vollen Umlauf um ein Paar der Verzweigungspunkte entsprechen. *Wir bezeichnen diese kurzweg als die Perioden des elliptischen Integrals.* Gehen wir z. B. irgendwie um die Verzweigungspunkte ee' im oberen Blatte der Riemannschen Fläche und zwar in solchem Sinne herum, dafs wir die Verzweigungslinie ee' zur Rechten haben. (Vgl. hier und im Folgenden Fig. 60.) Nach dem Cauchyschen Satze liefern alle solchen Umläufe denselben Wert des Integrals. Insbesondere können wir daher den Integrationsweg auf die Verzweigungslinie ee' zusammenziehen. Thun wir dieses, so haben wir erst von e nach e' an der Grenze der positiven oberen und dann von e' nach e an der Grenze der negativen oberen Halbebene entlang zu integrieren, was beidemal zu demselben Integralwert, nämlich dem uns von früher her bekannten Werte ω führt.

Jedem einmaligen vollen Umlaufe um die Verzweigungspunkte ee', ausgeführt im oberen Blatte und in dem angegebenen Sinne, entspricht daher eine Vermehrung von t um „die erste Periode“ 2ω. Es ist klar, dafs bei Umkehrung des Umlaufsinns oder bei Verlegung des Integrationsweges in das untere Blatt, der so entstehende Integralwert -2ω sein wird.

Jeder Integrationsweg, der die Punkte ee' umschliefst, kann aber auch als ein Umlauf um die beiden anderen Verzweigungspunkte $e''\infty$ aufgefafst werden. Jedem solchen Umlauf (insbesondere also auch einem auf die reelle Axe von e'' bis ∞ zusammengezogenen Wege) entspricht daher bei richtiger Fixierung des Sinnes derselbe Integralwert 2ω.

Ferner können wir um die Punkte ∞e bez. $e'e''$ einen Umlauf vornehmen. Je zwei solche Umläufe geben bei richtiger Fixierung des Fortschreitungssinnes ebenfalls dasselbe Integrationsresultat. Es genügt daher etwa den Umgang um die Punkte ∞e zu betrachten, welchen wir uns teils in der negativen unteren, teils nach Passierung des Verzweigungsschnittes ee' in der positiven oberen Halbebene vorgenommen denken und zwar in solchem Sinne, dafs die Linie ∞e beständig zur Linken liegt. Der Wert dieses Integrals ist ersichtlich das Doppelte desjenigen Integralwertes, den man erhält, wenn man von dem Verzweigungspunkte e an der Grenze der positiven oberen Halbebene nach $-\infty$ hin fortschreitet. Dieser Wert wurde pag. 263 mit $i\omega'$ bezeichnet; seine Berechnung liefs sich ebenso bewerkstelligen wie die Berechnung von ω. Mithin wird „die zweite Periode“ unseres Integrales, welche einem Umgange um eins der Punktepaare ∞e oder $e'e''$ entspricht, gleich $2i\omega'$.

In der folgenden Figur stellen wir die bisher betrachteten Integrationswege und die zugehörigen Integralwerte schematisch dar. Der

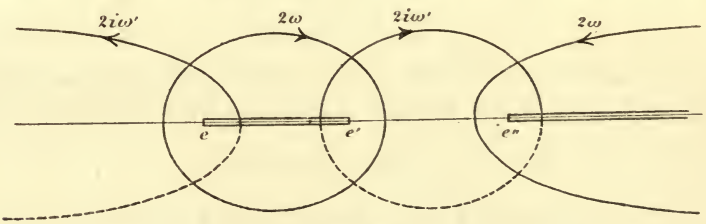


Fig. 60.

gemeinte Sinn ist je durch einen Pfeil markiert; die Integrationswege sind punktiert wo sie im unteren, ausgezogen wo sie im oberen Blatte verlaufen.

Auf die beiden Perioden 2ω und $2i\omega'$ lassen sich die Integrale, welche einem beliebigen in sich zurücklaufenden Integrationswege ent-

sprechen, zurückführen. *Der allgemeine Wert eines solchen Integrals, welcher auch „die allgemeine Periode" von t heifst, wird daher*

$$2m\omega + 2im'\omega'.$$

Die (positiven oder negativen) ganzen Zahlen m und m' bedeuten dabei einfach die Anzahl der (rechtsläufigen oder linksläufigen) Umgänge des Integrationsweges um die Strecken ee' und $e''\infty$.

Geben wir in unserem Integrale nur die obere und untere Grenze als Punkte der Riemannschen Fläche an, indem wir die Gestalt des Integrationsweges auf sich beruhen lassen, so ist der Wert von t, entsprechend dem angegebenen Werte der allgemeinen Periode, nur *bis auf Multipla von* 2ω *und* $2i\omega'$ *bestimmt.* Ziehen wir dagegen nur Punkte einer unserer vier Halbebenen in Betracht und fügen die Beschränkung hinzu, dafs auch der Integrationsweg ganz in dieser Halbebene verlaufen soll, so ist der Wert von t (nach dem Cauchyschen Satze) durch Angabe der oberen und unteren Grenze *eindeutig* festgelegt. —

Wir gehen nun zur funktionentheoretischen Untersuchung der anderen elliptischen Integrale über, welche uns bisher vorkamen, zu den Gröfsen ψ, φ und namentlich zu den α, β, γ, δ.

Im Gegensatz zu t sieht man, dafs ψ nicht ausnahmslos auf der Riemannschen Fläche endlich ist. Die Verzweigungspunkte e, e', e'', ∞ geben allerdings auch hier, aus denselben Gründen wie oben, zu keinem Unendlichwerden Anlafs. Der Integrand von ψ wird ferner aber unendlich für $u = \pm 1$ und zwar von der ersten Ordnung. Hieraus ergeben sich, wie wir sehen werden, für das Integral logarithmische Unstetigkeiten.

Betrachten wir z. B. den Wert $u = +1$. In dem Integrale

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

setzen wir überall $u = 1$ aufser in dem das Unendlichwerden bedingenden Faktor $1 - u$, wobei wir für U den pag. 225 angegebenen Wert $-\frac{1}{A^2}(N-n)^2$ zu benutzen haben; dann wird

$$\psi = \pm \frac{i}{2} \int \frac{du}{1-u} = \mp \frac{i}{2} \log(1-u).$$

Diese Gleichung giebt eine angenäherte Darstellung für das Verhalten der Gröfse ψ in der Nähe derjenigen beiden Stellen, an denen auf der Riemannschen Fläche der Wert $u = 1$ stattfindet; sie zeigt, dafs hier ψ in der That logarithmisch unendlich wird. Der „Multiplikator des Unendlichwerdens", wie wir die den Logarithmus multiplizierende Konstante

nennen wollen, wird dabei in dem einen Blatte gleich $-\frac{i}{2}$, in dem anderen gleich $+\frac{i}{2}$.

Ganz dieselbe Überlegung zeigt auch, daſs ψ an den beiden Stellen $u = -1$ mit dem Multiplikator $\pm\frac{i}{2}$ logarithmisch unendlich wird. Berücksichtigen wir überdies, daſs sich nach pag. 237 der Winkel φ beim Kugelkreisel ganz ebenso verhält wie ψ, so können wir sagen:

Die Eulerschen Winkel φ und ψ werden auf unserer Riemannschen Fläche in vier Punkten logarithmisch unendlich, nämlich an den Stellen $u = \pm 1$ im oberen und unteren Blatte, und zwar mit einem Multiplikator, welcher für die über einander gelegenen Punkte der beiden Blätter je entgegengesetzte Werte annimmt und überall den absoluten Betrag $\frac{1}{2}$ hat.

Die Theorie der elliptischen Integrale kennt aber noch einfachere logarithmisch unendlich werdende Integrale, nämlich solche mit nur *zwei* logarithmischen Unendlichkeitsstellen. Man bezeichnet diese als *Integrale dritter Gattung* und benutzt sie, um solche mit mehr Unstetigkeiten aus ihnen linear zusammenzusetzen. So haben wir in der That bereits pag. 268 unser ψ als Summe zweier Integrale dritter Gattung, der sog. *Legendreschen Normalintegrale Π* dargestellt.

Für die weitere analytische Behandlung sind daher jedenfalls die Eulerschen Winkel nicht die einfachsten analytischen Elemente. Es zeigt sich aber, daſs unsere Parameter α, β, γ, δ solche in einfachster Weise liefern, *daſs nämlich die Gröſsen* $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ *direkt elliptische Integrale dritter Gattung sind.*

Nehmen wir zunächst den Ausdruck für $\log\alpha$ aus Gleichung (8) von pag. 238 auf:

$$\log\alpha = \int \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Hier ist der Faktor $(u-1)$, der in ψ auftrat, aus dem Nenner verschwunden. Auch der Faktor $(u+1)$ bewirkt ein Unendlichwerden von $\log\alpha$ nur in einem der beiden Blätter. Wie wir eben sahen, wird nämlich für $u = -1$:

$$A^2U = -(N+n)^2,$$

also nach den in Figur 59 enthaltenen Festsetzungen

$$A\sqrt{U} = +i\,|\,N+n\,| \text{ im oberen Blatte,}$$
$$A\sqrt{U} = -i\,|\,N+n\,| \text{ im unteren Blatte.}$$

Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir für das Folgende annehmen, daſs

$$N > n > 0$$

sei. Alsdann bedeuten die in den eben angegebenen Werten von $A\sqrt{U}$ vorkommenden absoluten Beträge $|N+n|$ bez. $|N-n|$ dasselbe wie $(N+n)$ bez. $(N-n)$. Der Zähler des Integranden von $\log \alpha$ wird daraufhin für $u=-1$

gleich $+i(n+N)+i(n+N)=2i(n+N)$ im oberen Blatte,

gleich $-i(n+N)+i(n+N)=0$ im unteren Blatte.

Im unteren Blatte hebt also das Verschwinden des Zählers das gleichzeitige Verschwinden des Nenners auf, so dafs hier $\log \alpha$ endlich bleibt. Im oberen Blatte dagegen wird, wenn wir aufser in dem Faktor $(u+1)$ überall $u=-1$ setzen, näherungsweise:

$$\log \alpha = \int \frac{du}{1+u} = \log (1+u).$$

Im oberen Blatte besitzt also $\log \alpha$ einen logarithmischen Unendlichkeitspunkt.

Da nach einem allgemeinen Gesetz bei den Integralen algebraischer Funktionen logarithmische Unstetigkeiten immer paarweise auftreten müssen, so werden wir noch nach einer zweiten Unendlichkeitsstelle von $\log \alpha$ suchen. Diese liegt bei $u=\infty$. Machen wir nämlich, wie dies bei der Untersuchung des Unendlichfernen üblich ist, die Substitution $v=\frac{1}{u}$, so ergiebt sich für $v=0$ näherungsweise:

$$\log \alpha = -\int \frac{dv}{2v} = -\log \sqrt{v} = \log \sqrt{u}.$$

Die zweite logarithmische Unendlichkeitsstelle von $\log \alpha$ liegt also im Unendlichen. An den übrigen Verzweigungspunkten bleibt dagegen $\log \alpha$ wieder endlich.

Dieselben Überlegungen zeigen, dafs auch die Gröfsen $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ nur je zwei logarithmische Unendlichkeitsstellen besitzen, die eine

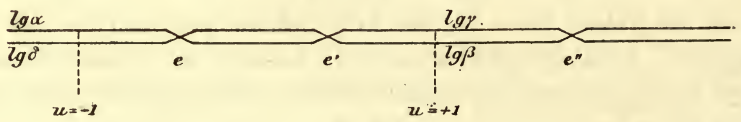


Fig. 61a.

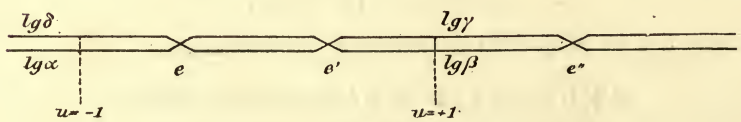


Fig. 61b.

im Unendlichen, die zweite bei $u=\pm 1$ im oberen oder unteren Blatte. Wie sich die Unendlichkeitsstellen auf die vier Punkte $u=\pm 1$ verteilen, stellen wir durch das Schema der Figur 61a dar, welches

wiederum einen Ausschnitt aus unserer Riemannschen Fläche darstellt und welches auf Grund der oben gemachten Festsetzung $N > n > 0$ entworfen ist. Bei einer anderen Annahme über Vorzeichen und Gröfsenverhältnis von N und n vertauschen sich unsere vier Unendlichkeitsstellen in leicht angebbarer Weise. So entspricht z. B. das Schema b der Annahme $0 > N > n$.

Somit haben wir bewiesen:

Die Logarithmen unserer Parameter α, β, γ, δ sind elliptische Integrale, welche nur an zwei Stellen der Riemannschen Fläche logarithmisch unendlich werden, nämlich bez. in einem der vier Punkte $u = \pm 1$, sowie im Punkte ∞; diese Logarithmen sind also direkt elliptische Integrale dritter Gattung.

Damit sind aber die eigentümlichen Vorzüge unserer Parameter noch nicht erschöpft. Wir richteten bereits bei dem Integrale ψ unsere Aufmerksamkeit auf den Multiplikator, mit welchem der unendlich werdende logarithmische Term behaftet ist. Von diesem hängt der Zuwachs ab, um den sich das Integral bei einem Umlauf um die fragliche Unendlichkeitsstelle additiv vermehrt. Unter den Integralen dritter Gattung besitzen nun diejenigen einen besonders einfachen funktionentheoretischen Charakter, bei welchen dieser Zuwachs, in sogleich noch näher zu definierender Weise berechnet, gleich $\pm 2\pi i$ wird. Es ist daher berechtigt, solche Integrale durch den besonderen Namen *Normalintegrale dritter Gattung* auszuzeichnen.*) Dabei bemerken wir, dafs Legendre die Normierung seiner Integrale dritter Gattung von einem anderen, mehr formalen Gesichtspunkte aus getroffen hat, dafs also die pag. 267 erwähnten Legendreschen Normalintegrale keine Normalintegrale in unserem jetzigen Sinne sind.

Um die Definition der Normalintegrale dritter Gattung präciser angeben zu können, müssen wir zunächst erklären, was wir unter einem „positiven“ und was wir unter einem „geschlossenen“ Umlauf um einen Punkt unserer Riemannschen Fläche verstehen wollen.

Wir setzen, je nachdem es sich um einen im Endlichen gelegenen Punkt $u = a$ oder um den unendlich fernen Punkt $u = \infty$ handelt, entweder $u - a = \varrho e^{i\varphi}$ oder $u = \frac{1}{v}$ und $v = \varrho e^{i\varphi}$. Darauf lassen wir bei festgehaltenem genügend kleinem ϱ den Winkel φ in beiden Fällen von Null aus nach der positiven Seite hin wachsen. Dadurch ergiebt sich in der u-Ebene und auf der Riemannschen Fläche ein

*) Die Wichtigkeit dieser Normierung wird von Jacobi gerade an dem Beispiel des Kreisels auseinandergesetzt. Vgl. seine Ausführungen über den Divisor des Integrals dritter Gattung. Ges. W. B. II pag. 477 u. ff.

Weg, von welchem wir sagen, dafs er um den Punkt $u = a$ bez. $u = \infty$ im *positiven* Sinne herumläuft. Diesen positiven Umlauf setzen wir, je nachdem es sich um einen gewöhnlichen Punkt der Riemannschen Fläche oder um einen Verzweigungspunkt handelt, solange fort, bis der eben definierte Winkel φ den Wert 2π oder 4π erreicht hat. In der u-Ebene umkreisen wir dann im ersten Falle den betreffenden Punkt einmal, im zweiten Falle zweimal. Auf der Riemannschen Fläche laufen wir aber in beiden Fällen nur einmal um den Punkt herum, da bei einem Verzweigungspunkte erst zwei Umgänge in der u-Ebene zu dem Ausgangspunkte auf der Riemannschen Fläche zurückführen. In beiden Fällen sprechen wir daher von einem *einmaligen, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen* Umlaufe.

Die genaue Definition der Normalintegrale dritter Gattung soll nun folgendermafsen lauten:

Unter einem Normalintegrale dritter Gattung verstehen wir ein solches Integral mit zwei logarithmischen Unendlichkeitsstellen, welches bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen, einmaligen positiven Umlauf um eine der Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $2\pi i$ erfährt; bei einem entsprechenden Umlauf um die andere Unendlichkeitsstelle nimmt dasselbe dann einem allgemeinen Gesetz zufolge den Zuwachs $-2\pi i$ auf.

Wir zeigen nun sofort, dafs unsere Integrale $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ in diesem Sinne Normalintegrale sind. Betrachten wir z. B. $\log \alpha$.

Zur Untersuchung der Unendlichkeitsstelle $u = -1$ von $\log \alpha$ setzen wir nach der soeben gegebenen Vorschrift $u + 1 = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen bei genügend kleinen Werten von ϱ den Winkel φ von 0 bis 2π wachsen. Da sich nach Obigem $\log \alpha$ in der Nähe der Stelle $u = -1$ wie $\log (u + 1)$ verhält, haben wir

$$\log \alpha = \log (u + 1) + \cdots = \log \varrho + i\varphi + \cdots$$

Wir sehen hieraus, dafs sich $\log \alpha$ bei einer positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = -1$ um $2\pi i$ vermehrt. Handelt es sich andrerseits um $u = \infty$, so setzen wir $v = \frac{1}{u} = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen φ abermals bei genügend kleinem ϱ und zwar jetzt von 0 bis 4π variieren. Da $\log \alpha$ im Unendlichen in $-\log \sqrt{v}$ übergeht, so wird

$$\log \alpha = -\log \sqrt{v} + \cdots = -\log \sqrt{\varrho} - \frac{i\varphi}{2} + \cdots$$

Wie man sieht, vermehrt sich $\log \alpha$ bei der soeben definierten positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = \infty$ gerade um $-2\pi i$.

In derselben Weise überzeugen wir uns, dafs auch $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ beim Umgange um ihre Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $\pm 2\pi i$ erfahren.

Wir können somit den bemerkenswerten Satz aussprechen:

Die Logarithmen unserer Parameter sind nicht nur Integrale dritter Gattung schlechtweg, sondern sie sind sogar Normalintegrale.

Dieser Umstand wird von augenfälliger Wichtigkeit, wenn wir von den Logarithmen zu den Werten unserer Parameter selbst übergehen. Die letzteren Gröfsen bleiben nämlich ersichtlich vollständig ungeändert bei einem Umgange um die Unendlichkeitsstellen ihrer Logarithmen. Z. B. verhält sich α in der Nähe der Stelle $u = -1$ direkt wie

$$C(u+1).$$

Wäre dagegen der Zuwachs bei einem Umlauf um die Stelle $u = -1$ nicht gleich $2\pi i$, sondern etwa gleich $2\pi i\lambda$ und dementsprechend der Multiplikator des Unendlichwerdens nicht gleich 1, sondern gleich λ, so würde sich α verhalten wie

$$C(u+1)^{\lambda},$$

im Allgemeinen also, wenn λ nicht gerade ganzzahlig ist, diese Stelle zum Verzweigungspunkte haben. Wir können daher sagen:

Dank der Normaleigenschaft unserer Integrale dritter Gattung verhalten sich unsere Parameter auf der Riemannschen Fläche durchgängig unverzweigt.

Damit ist nicht gesagt, dafs diese Parameter auch *eindeutig* auf der Riemannschen Fläche wären. Vielmehr werden sich ihre Logarithmen, entsprechend ihrer Darstellung als Integrale dritter Gattung, bei Umlaufung eines Paares von Verzweigungspunkten um gewisse charakteristische Zuwächse, „die Perioden des Integrals dritter Gattung", additiv vermehren, gerade so wie wir es für das Integral erster Gattung in Figur 60 geschildert haben. *Die Werte der Parameter selbst werden sich daher bei einem Umlauf um die Verzweigungspunkte je mit gewissen charakteristischen Faktoren multiplizieren.* Auf die Berechnung jener Zuwächse bez. dieser Faktoren von der Integraldarstellung aus brauchen wir hier nicht einzugehen, weil wir im vierten Paragraphen eine explicite Darstellung der α, β, γ, δ geben werden, durch welche die genannte Berechnung von selbst erledigt wird.

Jedenfalls erhellt aus alle diesen Bemerkungen, dafs unsere Parameter α, β, γ, δ im Hinblick auf funktionentheoretische Einfachheit den Eulerschen Winkeln überlegen sind. Es wird sich geradezu zeigen: *Die α, β, γ, δ stellen die einfachsten analytischen Bausteine dar, aus denen sich die allgemeinen Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen lassen.*

§ 3. Die Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ in der t-Ebene.

In diesem Paragraphen haben wir die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung zu leisten. Während wir bisher t als Funktion seiner oberen Grenze u oder besser noch als Funktion des Ortes $(u, \sqrt{U})$ auf der Riemannschen Fläche aufgefafst haben, wollen wir später die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ als Funktionen von t ansehen. Hierzu ist es eine Vorstufe, dafs wir zunächst $(u, \sqrt{U})$ und die zugehörigen Werte von t als gleichberechtigte Variable behandeln. Wir repräsentieren daher $t = t_1 + it_2$ seinerseits in einer komplexen Ebene, der *t-Ebene*, indem wir uns t_1 als Abscisse, t_2 als Ordinate auftragen, und fragen, welchen Weg bez. welches Gebiet t in seiner Ebene beschreibt, während die Variable u einen beliebigen Weg oder ein beliebiges Gebiet der Riemannschen Fläche bestreicht. Diese Frage bezeichnet man funktionentheoretisch als die *Frage nach der Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ auf die t-Ebene.*

Als untere Grenze des Integrals nehmen wir wie früher den Verzweigungspunkt e an, betrachten also

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Wir beginnen mit der Berandung der positiven oberen Halbebene unserer Riemannschen Fläche. *Welchen Weg beschreibt t, während wir u die reelle Axe in der positiven oberen Halbebene von links nach rechts durchlaufen lassen?*

Bei der Beantwortung dieser Frage haben wir uns wesentlich auf Figur 59 zu stützen, wo wir nach Realität und Vorzeichen die für die einzelnen Teilintervalle der reellen Axe gültigen Werte von $\sqrt{U}$ eingetragen haben. Hiernach sind die zugehörigen Inkremente von t, d. h. die Gröfsen $dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$, welche dem positiven Zuwachse du von u entsprechen, nach Realität und Vorzeichen gegeben. Wir stellen sie in der folgenden Tabelle zusammen:

Bewegt sich u:	so ist das Inkrement dt:
von e bis e',	positiv reell,
von e' bis e'',	positiv imaginär,
von e'' bis $+\infty$,	negativ reell,
von $-\infty$ bis e,	negativ imaginär.

In unserem Ausgangspunkte e, der unteren Grenze des Integrals, ist natürlich t gleich Null. Der Weg, den t beschreibt, setzt also im Nullpunkte der t-Ebene ein. Schreitet u von e bis e' fort, so wandert der zugehörige Punkt t nach vorstehender Tabelle längs der positiven reellen Axe. Wenn u den Wert e' erreicht, biegt der Weg rechtwinklig um und verläuft zunächst parallel der positiv imaginären t-Axe.

Sind wir auf der Riemannschen Fläche bis e'' gekommen, so macht der Weg von t abermals einen rechtwinkligen Knick; er führt von da ab wieder parallel der reellen Axe aber im negativen Sinne. Lassen wir u ins Positiv-Unendliche übergehen und aus dem Negativ-Unendlichen der reellen Axe zurückkehren, so haben wir in der t-Ebene eine abermalige rechtwinklige Umbiegung; die Bewegung des repräsentierenden Punktes, welche vorher im Sinne der negativen reellen Axe stattfand, verläuft weiterhin im Sinne der negativ-imaginären Axe. *Im Ganzen beschreibt t also einen rechtwinkligen Zug gerader Linien, während u die reelle Axe durchläuft.*

Wir finden leicht, dafs dieser Linienzug sich schliefsen mufs, und berechnen überdies die Länge seiner Kanten, wenn wir die in Fig. 60 angegebenen Werte der vollen Periodenumläufe berücksichtigen. Ziehen wir nämlich die dort gezeichneten Integrationswege auf die betreffenden Stücke der reellen Axe zusammen, so zerlegt sich der volle Umlauf in zwei kongruente geradlinige Hälften, deren jede als Integralwert von t die Hälfte der ganzen Perioden 2ω bez. $2i\omega'$ liefert. Hieraus folgt: *Der rechteckige Linienzug in der t-Ebene ist die Contour eines gewöhnlichen Rechtecks* (vgl. Fig. 62); *die Länge der horizontalen Rechteckseiten beträgt* ω, *die der vertikalen* ω'. *Die Ecken des Rechtecks sind, in der Reihenfolge, wie sie den Verzweigungspunkten*

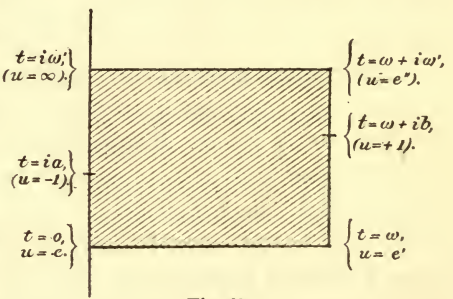


Fig. 62.

$$u = e,\ e',\ e'',\ \infty$$

entsprechen, gegeben durch die Werte

$$t = 0,\quad \omega,\quad \omega + i\omega',\quad i\omega'.$$

Wir treten nun mit der Variabelen u in das Innere der positiven oberen Halbebene ein und überzeugen uns, dafs dann auch die Variable t in das Innere unseres Rechtecks übergeht.

Da wir nämlich, wenn wir die reelle u-Axe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, jene Halbebene zur Linken haben, muſs sich auch in der t-Ebene einem allgemeinen funktionentheoretischen Prinzip zufolge das entsprechende Gebiet an den in der Richtung $i\omega'$, 0, ω, ... durchlaufenen rechteckigen Rahmen nach links hin ansetzen. Ferner haben wir uns klar zu machen, daſs das Abbild in der t-Ebene an keiner Stelle Lücken, Verzweigungspunkte oder Faltungen besitzt. Wir können uns zu dem Zwecke aus der Integralformel Reihenentwickelungen herstellen, welche den Wert von t als konvergente Potenzreihe aus dem Werte von u und umgekehrt diesen aus jenem zu berechnen gestatten. Führt man diese Andeutungen näher aus, so erkennt man, daſs den Punkten der positiven oberen Halbebene nur Punkte im Innern unseres Rechtecks entsprechen können und daſs diese Punkte den Raum zwischen unserem rechteckigen Rahmen lückenlos und einfach überdecken müssen. Wir werden also sagen können:

Die Fläche unseres Rechtecks stellt die Abbildung vor, welche die Gröſse t von der positiven oberen Halbebene der Riemannschen Fläche entwirft.

Um den Abbildungsprozess möglichst konkret zu fassen, können wir uns etwa die betrachtete Halbebene mit einer elastischen Membran bespannt denken, welche an der reellen Axe befestigt ist. Die Stücke der reellen Axe zwischen den Verzweigungspunkten stellen wir uns hier miteinander gelenkig verbunden vor. Wir drehen nun diese Stücke gegeneinander und deformieren sie solange, bis sie in den rechteckigen Rahmen der t-Ebene übergegangen sind. Gleichzeitig ist dann die ursprüngliche Membran unter Aufrechterhaltung der Stetigkeit in eine das Rechteck überspannende Membran deformiert. Die eine Membran stellt sich so als eine *Verzerrung* der anderen dar. Natürlich giebt dieses Verfahren zunächst nur eine sehr ungefähre qualitative Vorstellung von dem mathematischen Zusammenhange zwischen den Variabeln t und u. Wir können aber unsere Abbildung auch quantitativ richtig wiedergeben, wenn wir den in unserer Membran wirksamen elastischen Kräften die Eigentümlichkeit zuschreiben, nur solche Verzerrungen zuzulassen, bei welchen die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt wird, wo also irgend zwei von einem Punkte ausgehende Kurven nach der Deformation denselben Winkel einschlieſsen, wie vor derselben. Durch diese Bestimmung ist die Art der Verzerrung, wie man nachweisen kann, vollständig festgelegt, wenn wir nur noch die weitere Bedingung hinzufügen, daſs etwa den drei Punkten e, e', e'' der Halbebene die drei aufeinanderfolgenden Ecken unserer Rechtecksbegrenzung 0, ω, $\omega + i\omega'$ entsprechen sollen. Bekanntlich nennt man eine solche, in

den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung zweier Gebiete eine *konforme* oder *winkeltreue Abbildung.*

Ohne irgend welche Formel läfst sich also der analytische Zusammenhang zwischen den Variabeln t und u rein geometrisch folgendermafsen beschreiben:

Es entsprechen sich je zwei solche Variabelnwerte t und u, deren repräsentierende Punkte bei der konformen Abbildung der Halbebene auf die Fläche des Rechtecks (unter Zuordnung der Verzweigungspunkte zu den Ecken des Rechtecks) in einander übergehen. —

Ein sehr schöner Apparat, welcher die Konformität der Abbildung selbstthätig bewirkt, ist kürzlich von Herrn S. Finsterwalder*) konstruiert worden. Herr Finsterwalder stellt aus biegsamen Drähten ein Netzwerk her, indem er je drei Drähte durch eine mit drei Bohrungen versehene Hülse zusammenfafst, wobei es für die Herstellung am bequemsten ist, die Bohrungen unter überall gleichem Winkel gegen einander anzubringen. Die Hülsenmittelpunkte bilden dann in ihrer ursprünglichen Lage die Ecken einer regelmäfsigen Sechsecksteilung der Ebene. Da die Drähte in ihren Führungen frei auf- und abgleiten können und überdies gebogen werden können, so besitzt unser Apparat noch einen hohen Grad von Beweglichkeit. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird sogar unendlich grofs, wenn wir uns, wie es der in Rede stehenden Anwendung auf die konforme Abbildung wegen eigentlich geschehen müfste, sämtliche Dimensionen des Netzwerks unendlich klein und die Hülsen unendlich zahlreich und unendlich dicht nebeneinander liegend denken.

Man überzeugt sich nun durch das Experiment ohne Weiteres, dafs es möglich ist, der Berandung des Netzwerks jede beliebige Gestalt zu geben, d. h. das vom Netzwerk ursprünglich eingenommene Gebiet auf jedes andere Gebiet abzubilden, wobei noch drei Randpunkte des einen Gebiets dreien des anderen willkürlich zugewiesen werden können. Dafs diese Abbildung eine winkeltreue ist, folgt für die Winkel, unter denen die Drähte zusammenstofsen, unmittelbar aus der Starrheit der Hülsen; wenn aber bei einer stetigen (oder, genauer gesagt, durch analytische Funktionen vermittelten) Abbildung drei Winkel in jedem Punkte ungeändert bleiben, so gilt dasselbe nach allgemeinen Prinzipien für alle Winkel.

Durch den Finsterwalderschen Apparat wären wir also in der Lage, die durch unser elliptisches Integral vermittelte Abbildung rein experimentell zu realisieren. —

---

*) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, 1897.

Dieselbe Betrachtung wie für die positive obere werden wir des Weiteren für die negative obere, die positive untere Halbebene u. s. w. durchführen können. *Auch diese Halbebenen bilden sich in der t-Ebene in Rechtecke von der soeben geschilderten Gestalt ab.*

Die Lage dieser Rechtecke gegen das Abbild der positiven oberen Halbebene hängt von dem Integrationswege ab, insbesondere davon, in welchem Intervalle wir die reelle Axe überschreiten, um von der positiven oberen in die nunmehr abzubildenden Halbebenen zu gelangen. Die positive obere Halbebene hängt beispielsweise mit der negativen oberen längs der Strecke $-\infty\, e$ zusammen. Überschreiten wir also, von e beginnend, bei der Integration diese Strecke, so kommen wir zu Werten von t, welche der negativen oberen Halbebene entsprechen. In der t-Ebene füllen diese Punkte ein Rechteck aus, welches sich an die Seite $t = 0$ bis $t = i\omega'$ des ursprünglichen Rechtecks nach links hin anlegt. Treten wir andrerseits, durch die Verzweigungslinie ee' hindurch, in das negative untere Blatt ein, so gelangt der repräsentierende Punkt der t-Ebene in das Innere eines Rechtecks, welches eine Abbildung der negativen unteren Halbebene vorstellt. Dieses Rechteck legt sich an das Abbild der Linie ee', d. h. an die Rechtecksseite $t = 0$ bis $t = \omega$ nach unten hin an. Gehen wir sodann auf der Riemannschen Fläche von der negativen unteren in die positive untere Halbebene, indem wir wieder die Linie $-\infty$ bis e überschreiten, so entspricht dem in der t-Ebene der Übergang zu einem neuen Rechteck, welches mit dem Abbilde der negativen unteren Halbebene die Seite von $-i\omega'$ bis 0 gemeinsam hat. Im Ganzen haben wir so eine Abbildung unserer vier Halbebenen, d. h. eine Abbildung der ganzen Riemannschen Fläche gewonnen. *Diese besteht aus einem grofsen Rechteck, welches den Nullpunkt der t-Ebene zum Mittelpunkte hat und welches sich aus unseren vier kleinen Rechtecken zusammensetzt.* Wir schraffieren von den letzteren diejenigen beiden, welche den schraffierten positiven Halbebenen entsprechen und bekommen das folgende Gesamtbild der Riemannschen Fläche (vgl. Fig. 63), durch welches diese in höchst übersichtlicher Weise auseinandergelegt erscheint. Ein solches Rechteck, welches die Perioden des elliptischen Integrals zu Seiten hat, bezeichnen wir als ein „Periodenrechteck".

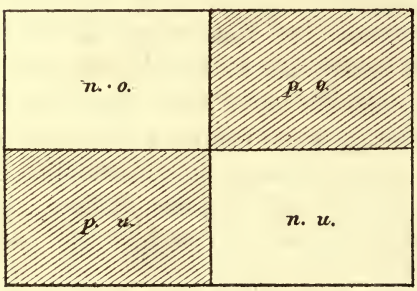


Fig. 63.

Einige Erläuterungen sind nur noch bezüglich der Randpunkte

unseres Periodenrechtecks erforderlich. Diese entsprechen, wie man gesehen hat, den Punkten der beiden Strecken $e' e''$ und $e'' \infty$ in den vier Halbebenen. In diesen Strecken ist ersichtlich die Kontinuität unserer Abbildung unterbrochen. Während z. B. auf der geschlossenen Riemannschen Fläche, wie sie nach richtiger Zusammenfügung der Ränder unserer Verzweigungslinien vorliegt, die Strecke $e' e''$ des positiven oberen mit der Strecke $e' e''$ des negativen oberen Blattes direkt zusammenfällt, sind die Bilder dieser Strecken in der t-Ebene auf den gegenüberliegenden vertikalen Seiten des Periodenrechtecks gelegen; entsprechend liegen die Bilder der auf der Riemannschen Fläche zusammenfallenden Strecken $e'' \infty$ in der t-Ebene auf den gegenüberliegenden horizontalen Rechtecksseiten. Wir müfsten uns, um eine durchaus stetige und durchaus eindeutige Abbildung der Riemannschen Fläche zu haben, die gegenüberliegenden Ränder des Rechtecks in der Weise zugeordnet vorstellen, dafs je zwei gegenüberliegende Randpunkte auch im Bilde als identisch gelten können. Indessen brauchen wir hierauf nicht näher einzugehen, da der beregte Mifsstand, die Diskontinuität der Abbildung, im Folgenden von selbst in Fortfall kommt, wenn wir unsere Figur weiter vervollständigen.

In der That ist unsere Abbildungsfigur noch nicht fertig. Wir sind vorher von der positiven oberen zur negativen oberen Halbebene durch die Strecke $-\infty e$ hindurch gegangen. Ebenso gut können wir aber auch durch $e' e''$ dahin gelangen. Thun wir das Letztere, so erhalten wir als Bild der negativen oberen Halbebene ein Rechteck, welches sich an das Abbild der Strecke $e' e''$, d. h. an die Seite ω bis $\omega + i\omega'$ unseres zuerst gezeichneten Rechtecks anlegt. Überhaupt giebt es von jeder positiven Halbebene zu den beiden negativen und von jeder negativen zu den beiden positiven auf der Riemannschen Fläche je zwei verschiedene Zugänge. Dementsprechend müssen wir die Figur so vervollständigen, dafs sich an jede freie Rechteckseite ein weiteres Rechteck anlegt, wobei jedes schraffierte Rechteck von vier nichtschraffierten, jedes nichtschraffierte von vier schraffierten umgeben wird. Als vervollständigte Abbildungsfigur bekommen wir daher ein *schachbrettartiges Muster*, wie es durch die Figur 64 dargestellt wird. Der einzelne Horizontalstreifen enthält dabei entweder nur Bilder der Halbebenen des oberen oder des unteren Blattes. Ein System von Periodenrechtecken ist durch etwas stärkeres Ausziehen der Begrenzungen aus dem System der kleineren Rechtecke herausgehoben.

Diese Rechtecksteilung zusammen mit der Vorstellung der Riemannschen Fläche giebt den einfachsten und vollständigsten Begriff von der analytischen Beziehung zwischen den Gröfsen t und u, bez. $\sqrt{U}$.

Betrachten wir zunächst t als Funktion von u, indem wir uns die obere Grenze u als einen bestimmten Punkt der Riemannschen Fläche gegeben denken, d. h. indem wir uns aufser dem Werte von u auch noch das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ in bestimmter Weise gewählt denken. (Die untere Grenze soll wie früher in dem Verzweigungspunkte e liegen.) Wir sahen bereits pag. 400, dafs der Wert von t durch Angabe der oberen Grenze nicht vollständig bestimmt ist. Je nach der Gestalt des Integrationsweges erhält man unendlich viele Werte von t, welche sich um Vielfache der Perioden 2ω und $2i\omega'$ unterscheiden. Dieser Sachverhalt kommt in unserer Rechteckseinteilung besonders deutlich zum Ausdrucke. Da nämlich jede Halbebene der Riemannschen Fläche sich in unendlich viele Rechtecke der t-Ebene abbildet, giebt es zu jedem Punkte der Fläche unendlich viele zugehörige Punkte der t-Ebene und zwar befindet sich in jedem Periodenrechtecke ein solcher Punkt. Verschieben wir unsere ganze Figur parallel mit sich um 2ω in Richtung der reellen oder um $2\omega'$ in Richtung der imaginären Axe, so kommt sie allemal mit sich zur Deckung; dabei geht jedes Rechteck in ein ebenso bezeichnetes Rechteck, jeder Punkt in einen Punkt über, dem auf der Riemannschen Fläche immer dieselbe Stelle entspricht. Wir wollen alle diese Punkte als *äquivalente Punkte* bezeichnen. Ist also t irgend ein Punkt der t-Ebene, welcher der gegebenen Stelle u, $\sqrt{U}$ der Riemannschen Fläche entspricht, so werden die äquivalenten Punkte dargestellt durch

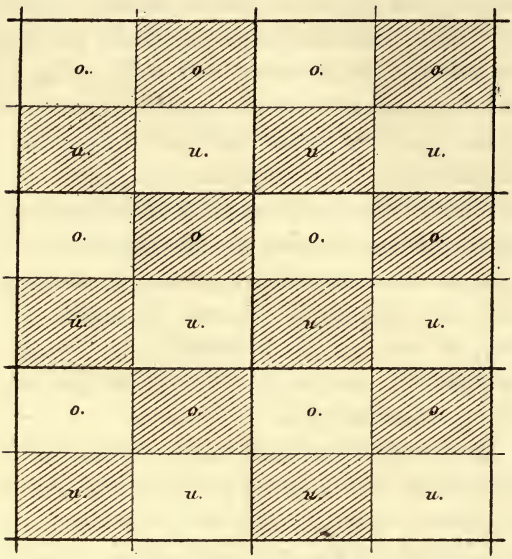


Fig. 64.

$$t + 2m\omega + 2m'i\omega',$$

wo m und m' irgend welche positiven oder negativen ganzen Zahlen bedeuten. Alle diese Werte von t gehören zu derselben oberen Grenze u, $\sqrt{U}$ des Integrals. In analytischer Hinsicht ziehen wir hieraus namentlich den Schlufs:

Als Funktion der oberen Grenze aufgefafst, ist t eine unendlich vieldeutige Funktion.

Jetzt geben wir uns umgekehrt den Wert von t und fragen nach zugehörigen Werten von u. Jedem Punkt der t-Ebene entspricht auf der Riemannschen Fläche und um so mehr in der u-Ebene ein und nur ein ganz bestimmter Punkt. Daraus folgt sofort:

Als Funktion von t aufgefaſst, ist u eine eindeutige Funktion.

Nun ist es analytisch sicher vorteilhafter, mit eindeutigen wie mit vieldeutigen Funktionen zu operieren. Gleichzeitig bemerkten wir zu Anfang des vorigen Paragraphen, daſs es vom Standpunkte der Mechanik wünschenswert ist, die Elemente der Bewegung direkt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. *Beide Gründe veranlassen uns, unser elliptisches Integral „umzukehren", d. h. in Zukunft t als die unabhängige Variable anzusehen und die Gröſse u als Funktion von t darzustellen.*

Über die Eigenschaften der Funktion u von t (wir schreiben kurz $u = u(t)$) können wir sogleich noch eine nähere Bestimmung hinzufügen. Wenn wir nämlich den Wert des Argumentes um Vielfache der beiden Perioden 2ω und $2i\omega'$ vermehren, so kommen wir, wie bemerkt, in der t-Ebene zu Punkten, welche derselben Stelle der Riemannschen Fläche entsprechen. u bleibt also ungeändert bei Vermehrung des Arguments um eine der beiden Perioden. Wir sagen: *u ist eine doppeltperiodische Funktion von t*, oder *u ist eine elliptische Funktion.*

Eigentlich müſsten wir auch ausdrücklich beweisen: *u ist eine analytische Funktion, eine Funktion des komplexen Argumentes t.* Indessen wollen wir uns in dieser Hinsicht auf den Satz der allgemeinen Funktionentheorie berufen, daſs durch Umkehrung einer analytischen Funktion immer wieder eine analytische Funktion entsteht. Da nun t seiner Integraldarstellung nach sicher eine Funktion des komplexen Argumentes u ist, so schlieſsen wir, daſs auch die Funktion $u(t)$ eine analytische Funktion werden muſs.

Auf die wirkliche Berechnung der Funktion $u(t)$ brauchen wir im Einzelnen nicht einzugehen, weil wir im Folgenden diese Funktion doch wieder verlassen und noch einfachere Funktionen (die sogenannten ϑ-Funktionen) kennen lernen werden, aus denen sich unter Anderem auch die doppeltperiodische Funktion u in bequemster Weise zusammensetzen läſst.

Wir wollen nun zeigen, daſs die Einführung des überall endlichen Integrales t als unabhängiger Variabler noch für eine groſse Klasse weiterer Funktionen von wesentlichem Vorteil wird. *Wir werden nämlich sehen, daſs zahlreiche Funktionen, welche in ihrer Abhängigkeit von u mehrdeutig sind, durch Einführung von t eindeutig gemacht oder, wie wir kurz sagen wollen, „uniformisiert" werden.*

Es sind dieses in erster Linie *die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Funktionen*, insbesondere also die rationalen Funktionen von u und $\sqrt{U}$. In der That zeigt unsere Rechtecksteilung nicht nur, dafs jedem Punkte der t-Ebene ein und nur ein Punkt der u-Ebene entspricht, sondern auch eine und nur eine Stelle der Riemannschen Fläche. Der Ort auf der Riemannschen Fläche und die sämtlichen auf ihr eindeutigen Funktionen hängen also von dem Orte in der t-Ebene, d. h. von dem Werte des überall endlichen Integrals in eindeutiger Weise ab.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir etwa die in der u-Ebene zweiwertige, auf der Riemannschen Fläche aber eindeutige Funktion $\sqrt{U}$. Dafs diese auch in der t-Ebene eindeutig ist, läfst sich sofort verifizieren. Da nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}},$$

so folgt

$$\sqrt{U} = \frac{du}{dt} = u'(t);$$

durch Einführung der Variabeln t wird also insbesondere die in u zweiwertige Funktion $\sqrt{U}$ uniformisiert.

Die uniformisierende Wirkung von t reicht aber noch viel weiter: *Es werden nicht nur die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Gröfsen eindeutige Funktionen von t, sondern auch alle auf der Fläche mehrdeutigen Gröfsen, deren Mehrdeutigkeit von derselben Beschaffenheit ist, wie die Mehrdeutigkeit des überall endlichen Integrales selbst, d. h. welche bei allen denjenigen Umläufen ungeändert bleiben, die den Wert von t ungeändert lassen.* (Insbesondere müssen die fraglichen Gröfsen natürlich relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt sein.)

Zum Beweise bedenke man, dafs jeder Umlauf auf der Riemannschen Fläche, bei dem sich der Wert der zu uniformisierenden Funktion ändert, nach Voraussetzung auch den Wert der Variabeln t abändert und daher in ein anderes Gebiet der t-Ebene führt. Die verschiedenen Werte der fraglichen Funktion, welche eventuell zu demselben Punkte der Riemannschen Fläche gehören, kommen also in der t-Ebene an lauter verschiedene Stellen zu liegen.

Auf unsere Parameter α, β, γ, δ findet dieses wichtige Prinzip unmittelbare Anwendung. Wir sahen ja pag. 405, dafs die α, β, γ, δ auf der Riemannschen Fläche unverzweigt sind, und dafs sie nur bei denjenigen Umgängen (und zwar um gewisse charakteristische Faktoren) geändert werden, welche auch den Wert des überall endlichen Integrals (und zwar um die additiven Perioden 2ω, $2i\omega'$) abändern.

Wir können also sagen:

Unsere auf der Riemannschen Fläche unendlich vieldeutigen, aber unverzweigten Parameter α, β, γ, δ werden in der t-Ebene eindeutig.

Die so entstehenden eindeutigen und, wie wir hinzufügen können, analytischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ sind wie gesagt nicht doppeltperiodisch, da sie sich beim Übergang von einem Periodenrechteck zu einem anderen je um einen konstanten Faktor ändern; wir bezeichnen sie mit Hermite (s. u.) trotzdem gleichfalls als *elliptische Funktionen* und zwar genauer als *elliptische Funktionen zweiter Art*, zum Unterschied von den rein doppeltperiodischen Funktionen, die wir *elliptische Funktionen erster Art* nennen.

Des Weiteren fragen wir nach den Null- und Unendlichkeitsstellen unserer elliptischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in der t-Ebene, da sich auf die Lage dieser Stellen die spätere analytische Darstellung unserer Parameter gründet. Die Null- und Unendlichkeitsstellen der Gröfsen α, β, γ, δ sind natürlich mit den logarithmischen Unendlichkeitsstellen von $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ identisch. Die Verteilung der letzteren haben wir in Figur 61 übersichtlich dargestellt, unter der Annahme

$$N > n > 0.$$

Dieselbe Annahme soll auch für das Folgende zu Grunde gelegt werden.

Insbesondere untersuchen wir etwa die Funktion $\alpha(t)$. Nach Figur 61a wird $\log\alpha$ unendlich grofs für $u = -1$ und $u = \infty$ und zwar verhält sich $\log\alpha$ nach pag. 402

$$\text{für } u = -1 \text{ wie } \log(u+1), \quad \text{für } u = \infty \text{ wie } \log\sqrt{u}.$$

Gehen wir von dem Logarithmus zum Numerus über, so sehen wir: Der Parameter α verschwindet für $u = -1$, er wird unendlich für $u = \infty$.

In der t-Ebene entspricht dem Werte $u = \infty$ nach Figur 62 der Punkt $t = i\omega'$ bez. einer der äquivalenten Punkte

$$\text{(I)} \qquad t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Ferner bildet sich die Stelle $u = -1$ des oberen Blattes, wie gleichfalls aus Figur 62 hervorgeht, in einen Punkt ab, welcher auf der imaginären Axe zwischen $t = 0$ und $t = i\omega'$ liegt — wir bezeichnen den zugehörigen t-Wert mit ia — bez. in einen der äquivalenten Punkte; alsdann bestimmt sich a durch das schon pag. 263 angegebene Integral:

$$ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die Gesamtheit der äquivalenten Stellen, d. h. aller derjenigen Punkte der t-Ebene, welche Bildpunkte der Stelle $u = -1$ im oberen Blatte der Riemannschen Fläche darstellen, ist daher gegeben durch

$$(II) \qquad t = ia + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Wir wissen bereits, dafs $\alpha(t)$ in den Punkten (I) unendlich grofs wird, in den Stellen (II) verschwindet. Wir wollen noch die Ordnung des Verschwindens und die Ordnung des Unendlichwerdens feststellen. Zu dem Zwecke erinnern wir daran, dafs sich $\log \alpha$ bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um die Stellen $u = -1$ und $u = \infty$ um $\pm 2\pi i$ ändert (vgl. pag. 404). Bei der konformen Abbildung auf die t-Ebene geht aber ein einmaliger geschlossener Umlauf auf der Riemannschen Fläche in einen ebensolchen Umlauf in der t-Ebene über, wie sich aus dem Begriffe der konformen Abbildung ergiebt. Die Null- und Unendlichkeitsstellen von α sind also so beschaffen, dafs $\log \alpha$ bei einer einmaligen Umlaufung derselben den Zuwachs $\pm 2\pi i$ annimmt. Dies besagt aber gerade, dafs die Ordnung des Verschwindens und Unendlichwerdens gleich 1 ist. Mithin können wir sagen:

Die Punkte (I) *sind einfache Unendlichkeitsstellen, die Punkte* (II) *einfache Nullstellen der Funktion* $\alpha(t)$. *Andere Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt* α *nicht.*

In ähnlicher Weise ergeben sich die Null- und Unendlichkeitsstellen von β, γ und δ in der t-Ebene. Greifen wir z. B. γ heraus. Auf der Riemannschen Fläche wird $\log \gamma$ logarithmisch unendlich für $u = \infty$ und (vgl. Fig. 61) für $u = +1$ im oberen Blatte. In der t-Ebene entspricht dem Unendlichen der Riemannschen Fläche die Stelle $t = i\omega'$ und die äquivalenten Stellen. Die Gesamtheit dieser Stellen wird wieder dargestellt durch

$$(I) \qquad t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Dem Punkte $u = +1$ des oberen Blattes gehört in der t-Ebene nach Fig. 62 ein Punkt auf der Rechtecksseite zwischen $t = \omega$ und $t = \omega + i\omega'$ zu. Der Abstand dieses Punktes von der Axe der reellen Zahlen heifse b; man berechnet b, wie schon pag. 263 angegeben, indem man das überall endliche Integral im oberen Blatte von dem Verzweigungspunkte e' bis zum Punkte 1 etwa geradlinig erstreckt:

$$ib = \int_{e'}^{1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Der Wert von t in dem genannten Punkte wird alsdann $t = \omega + ib$. Aufser diesem Punkte haben wir natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte

(II) $$t = \omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$$

zu berücksichtigen. Darauf schliefsen wir ebenso wie oben, *daſs die Stellen* (I) *einfache Unendlichkeitsstellen, die Stellen* (II) *einfache Nullstellen und zwar die einzigen Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktion* $\gamma(t)$ *sind.*

Die noch fehlenden Null- und Unendlichkeitsstellen von β und δ ergeben sich darauf aus der Bemerkung, daſs α und δ einerseits, β und $-\gamma$ andrerseits konjugiert imaginäre Gröfsen sind. Dies folgte für reelle Werte von t aus der ursprünglichen Definition unserer Parameter (vgl. pag. 21); es gilt aber auch für konjugiert komplexe Werte der Zeit, wie unmittelbar aus der Integraldarstellung der Logarithmen von α, β, γ, δ hervorgeht. Mithin werden auch die Nullstellen von β und δ denen von α und γ konjugiert sein; wir erhalten diese aus den unter (II) angegebenen Werten, indem wir einfach $+ia$, $+ib$ mit $-ia$, $-ib$ vertauschen. Ferner werden die Unendlichkeitsstellen von β und δ mit denen von α und γ direkt übereinstimmen, da die unter (I) angegebenen Punkte in ihrer Gesamtheit sich selbst konjugiert sind. Die vollständige Tabelle der Null- und Unendlichkeitsstellen unserer vier Parameter sieht daher folgendermafsen aus:

	Nullstellen.	Unendlichkeitsstellen.
α	$+ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$	$i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$
β	$+\omega - ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$	
γ	$-\omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$	
δ	$-ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$	

Nunmehr sind wir in der Lage, die explicite Darstellung unserer Parameter als Funktionen der Zeit zu entwickeln. Diese gründen wir auf die sogenannten ϑ-Funktionen, welche seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Transcendenten eine ganz fundamentale Rolle spielen.

§ 4. Darstellung der α, β, γ, δ durch ϑ-Quotienten.

Die ϑ-Funktionen sind eindeutige Funktionen ihres Argumentes, welches wir mit t bezeichnen, die im Endlichen nirgends unendlich werden. Sie besitzen, ähnlich wie die α, β, γ, δ, ein System äquivalenter Nullstellen, von dem auf jedes Periodenrechteck eine Nullstelle entfällt; beim Übergange von einem Periodenrechteck zu einem anderen multiplizieren sie sich je mit einem charakteristischen Faktor, welcher aber nicht, wie bei den α, β, γ, δ, von t unabhängig ist. Eine weitere Eigenschaft der ϑ-Funktionen, welche für unsere Zwecke

besonders wertvoll ist, besteht darin, dafs sie sich aufserordentlich gut konvergenter und für die numerische Rechnung geeigneter Reihendarstellungen erfreuen.*)

In der Bezeichnung der ϑ-Funktionen herrscht bei den verschiedenen Autoren leider eine grofse Verschiedenheit. Wir werden uns hier an keine der üblichen Bezeichnungen genau halten, was insofern unbedenklich ist, als unsere Darstellung für sich genommen verständlich sein soll.

Während Jacobi vier nicht wesentlich unterschiedene ϑ-Funktionen neben einander betrachtet, werden wir mit einer solchen auskommen. Wir bezeichnen sie durch $\vartheta(t)$ und richten die Definition so ein, dafs ϑ eine ungerade Funktion von t wird, dafs sie also im Nullpunkte der t-Ebene sowie in den sämtlichen äquivalenten Punkten und nur in diesen verschwindet. Formal sei unsere ϑ-Funktion durch die folgende Reihe gegeben:

$$\vartheta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} e^{-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\,\pi i}. \tag{1}$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \qquad s = \frac{t\pi}{2\omega} \tag{2}$$

können wir, was gelegentlich bequem sein wird, hierfür auch schreiben:

$$\vartheta(t) = 2q^{1/4}\sin s - 2q^{9/4}\sin 3s + 2q^{25/4}\sin 5s - \cdots. \tag{3}$$

Die Jacobische Bezeichnung für unsere Funktion würde lauten:

$$\mathrm{H}\left(\frac{t\pi}{2\omega}\right).$$

Die Eigenschaften der ϑ-Funktion, welche oben bereits allgemein angedeutet wurden, lassen sich nun für unsere spezielle Auswahl derselben auf Grund der Gleichung (1) leicht verifizieren.

Zunächst sieht man, dafs unsere Funktion eindeutig und für alle endlichen Werte von t endlich ist. Die Reihe (1) konvergiert nämlich, wie man leicht nachweist, in der ganzen t-Ebene.

---

*) Statt der ϑ-Funktion wird in der Litteratur jetzt meist die von Weierstrass eingeführte σ-Funktion gebraucht, welche sich von der ϑ-Funktion nur um einen Exponentialfaktor unterscheidet. Wir ziehen die ϑ-Funktion für unsere Zwecke vor, weil ihre Verwendung weniger Vorbereitungen erfordert und die spezifischen Vorzüge der σ-Funktion hier doch nicht zur Geltung kommen. Überdies ist die ϑ-Funktion für die numerische Berechnung, die wir stets im Auge behalten müssen, hinterher doch unentbehrlich.

Wir bestimmen sodann das Verhalten der ϑ-Funktion bei Vermehrung ihres Argumentes um Periodenvielfache. Offenbar ändert eine Hinzufügung der reellen Periode 2ω in jedem einzelnen Gliede der Reihe (3) nur das Vorzeichen. Wir haben also

$$\vartheta(t + 2\omega) = -\vartheta(t). \tag{4}$$

Fügen wir die imaginäre Periode $2i\omega'$ hinzu, setzen also $t + 2i\omega'$ statt t, so wird der Exponent des allgemeinen Gliedes in (1)

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi - \frac{\omega'}{\omega}(2n-1)\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\,\pi i =$$

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi + \frac{\omega'}{\omega}\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n+1}{2}\,\pi i - \frac{t+\omega}{\omega}\,\pi i.$$

Dieser Exponent hat also den von n unabhängigen Zuwachs

$$\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t+\omega}{\omega}\,\pi i$$

bekommen und aufserdem hat sich der Stellenzeiger n um eine Einheit vermehrt. Durch letzteren Umstand wird aber der Wert der Reihe nicht geändert, da n von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Wir finden daher

$$\vartheta(t + 2i\omega') = -e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t\pi i}{\omega}}\,\vartheta(t). \tag{5}$$

Die Funktionaleigenschaften (4) und (5) können umgekehrt zusammen mit der Forderung, dafs ϑ nirgends unendlich werden soll, dazu dienen, um die ϑ-Funktion bis auf einen konstanten Faktor zu definieren, was wir nur historisch anführen.

Um von hieraus zu der in Aussicht gestellten Darstellung unserer Parameter zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Derselbe wird null bez. unendlich grofs an den Stellen $t = ia$ bez. $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen, und zwar beides von der ersten Ordnung. Dieser Ausdruck besitzt also dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie unsere Funktion $\alpha(t)$ (vgl. den vorigen Paragraphen). Er unterscheidet sich von der letzteren demnach nur um einen Faktor, welcher für keinen endlichen Wert von t verschwindet oder unendlich grofs wird, dessen Logarithmus also für keinen endlichen Wert von t unendlich grofs werden kann. Einem solchen Faktor können wir stets die Form geben

$$e^{G(t)},$$

wo $G(t)$ eine Funktion ist, die im Endlichen nirgends unendlich wird, eine sogenannte ganze transcendente Funktion. Wir haben also die Gleichung

$$\alpha(t) = e^{G(t)}\,\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')}. \tag{6}$$

In unserem Falle folgt nun aus den Eigenschaften des Parameters $\alpha(t)$ einerseits und der ϑ-Funktion andrerseits, dafs sich die *transcendente ganze* Funktion auf eine *lineare ganze* Funktion reduzieren mufs. Nach den soeben bewiesenen Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion multipliziert sich nämlich der ϑ-Quotient auf der rechten Seite bei Vermehrung von t um eine der beiden Perioden mit einem konstanten Faktor, nämlich mit

$$+1$$

bei Hinzufügung von 2ω, mit

$$e^{-\frac{a-\omega'}{\omega}\pi}$$

bei Hinzufügung von $2i\omega'$. Ferner wissen wir (vgl. pag. 414), dafs auch $\alpha(t)$ bei Vermehrung von t um eine der beiden Perioden einen von t unabhängigen Faktor annimmt. Die Faktoren der rechten und linken Seite in unserer Gleichung müssen übereinstimmen; wir haben daher, unter c und c' zwei Konstanten verstanden, die sich aus den genannten Faktoren zusammensetzen,

$$\begin{aligned} G(t+2\omega) &- G(t) = c, \\ G(t+2i\omega') &- G(t) = c', \end{aligned}$$

woraus durch Differentiation nach t folgt:

$$\begin{aligned} G'(t+2\omega) &= G'(t), \\ G'(t+2i\omega') &= G'(t). \end{aligned}$$

Hiernach wäre $G'(t)$ eine doppeltperiodische Funktion, welche im Endlichen nirgends unendlich wird. In der Funktionentheorie wird aber gezeigt, dafs eine solche Funktion notwendiger Weise eine Konstante ist. Wir haben also etwa

$$G'(t) = l$$

und

$$e^{G(t)} = ke^{lt}, \tag{7}$$

wo k und l gewisse von t unabhängige Gröfsen sind, welche wir sogleich näher angeben werden.

Die explicite Form der Funktion $\alpha(t)$ ist nun auf Grund der Gleichungen (6) und (7) bekannt. Fügen wir die analog gebauten und ebenso abzuleitenden Ausdrücke für β, γ und δ hinzu, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= k_1 e^{l_1 t}\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \beta &= k_2 e^{l_2 t}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \gamma &= k_3 e^{l_3 t}\frac{\vartheta(t+\omega-ib)}{\vartheta(t+i\omega')}, \\ \delta &= k_4 e^{l_4 t}\frac{\vartheta(t+ia)}{\vartheta(t+i\omega')}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt: *Unsere Parameter* α, β, γ, δ *werden dargestellt je durch einen einfachen* ϑ*-Quotienten, zu dem noch eine Exponentialgröfse und eine Konstante als Faktor hinzutritt.*

Übrigens ist es nur nötig, zwei dieser Ausdrücke, etwa α und β zu berechnen, weil alsdann die beiden anderen Parameter als konjugiert imaginäre Gröfsen mitbestimmt sind.

Man bemerke noch, dafs die hier eingeschlagene Methode recht eigentlich dem schönen Prinzipe entspricht, welches Riemann in allen seinen Untersuchungen zur Geltung gebracht hat: Zuerst die Eigenschaften der zu behandelnden Funktionen zu diskutieren und alles Formelmäfsige bis zum Schlufs zurückzudrängen, wo es sich gleichsam von selbst aus den festgestellten Eigenschaften der Funktionen ergeben mufs. So haben wir in der That unsere analytische Darstellung (8) als eine notwendige Konsequenz der vorhergehenden Untersuchungen über die Eindeutigkeit unserer Funktionen, über die Lage ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen gewonnen.

Um die prinzipielle Bedeutung der Ausdrücke (8) ins rechte Licht zu setzen, schicken wir einige historische Bemerkungen hinsichtlich der elliptischen Funktionen voraus.

Ursprünglich verstand man seit Jacobi unter einer elliptischen Funktion ausschliefslich eine solche Funktion, welche bei Vermehrung des Argumentes um Periodenvielfache *völlig ungeändert* bleibt.

Man zeigt*), dafs eine so definierte elliptische Funktion in dem von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ gebildeten Rechtecke (oder allgemeiner gesagt, Parallelogramme) jeden Wert, insbesondere die Werte Null und Unendlich die gleiche Anzahl von Malen annimmt. Diese Anzahl (n) heifst der Grad der elliptischen Funktion. Ferner beweist man, dafs zwischen den Argumenten der in einem einzelnen Periodenrechteck gelegenen Nullstellen (a_ν) und denen der Unendlichkeitsstellen (b_ν) die Relation besteht:

$$\Sigma a_\nu - \Sigma b_\nu = 2\mu\omega + 2i\mu'\omega',$$

unter μ und μ' zwei ganze Zahlen verstanden. Es ist nun immer möglich, eine elliptische Funktion durch einen ϑ-Quotienten auszudrücken, in der Form:

$$ke^{lt}\prod_{\nu=1,\ldots n}\frac{\vartheta(t-a_\nu)}{\vartheta(t-b_\nu)}.$$

In der That besitzt dieser Ausdruck vermöge der oben angegebenen Funktionaleigenschaften der ϑ-Funktion die geforderte Periodicität

*) Diese allgemeinen Sätze sind wohl zuerst von Liouville erkannt worden. Vgl. seine Note: Sur les fonctions elliptiques. Liouvilles Journal, Bd. XX, 1855.

wenn man noch die Gröfse l gleich $\frac{i\pi\mu'}{\omega}$ wählt. Insbesondere bemerken wir noch, dafs ein reiner ϑ-Quotient ($l = 0$) jedenfalls dann eine doppeltperiodische Funktion darstellt, wenn die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist.

Später hat Hermite*) darauf aufmerksam gemacht, dafs man namentlich in den mechanischen Anwendungen auf allgemeinere ϑ-Quotienten geführt wird, zwischen deren Null- und Unendlichkeitsstellen die soeben angegebene Relation nicht besteht, und dafs es der Mühe wert ist, diese Quotienten als selbständige Elemente in die Theorie einzuführen. Er belegt sie mit dem schon pag. 415 benutzten Namen der *elliptischen Funktionen zweiter Art* und unterscheidet die rein periodischen Funktionen von ihnen als *elliptische Funktionen erster Art.* Eine elliptische Funktion zweiter Art ändert sich, wenn man das Argument t um Perioden wachsen läfst, je um einen konstanten Faktor; sie verhält sich, wie wir sagen, *multiplikativ.*

Die Anzahl der im Zähler (oder Nenner) stehenden ϑ-Funktionen giebt allemal den Grad der Funktion an. Dabei besteht folgender Unterschied zwischen den elliptischen Funktionen erster und zweiter Art: *Es giebt keine elliptischen Funktionen erster Art ersten Grades; dagegen sind elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades sehr wohl möglich.*

Wäre nämlich bei einer elliptischen Funktion erster Art $n = 1$, so hätten wir im Periodenparallelogramm nur eine Nullstelle und, wegen der für die a_ν, b_ν bestehenden Relation, eine mit jener zusammenfallende Unendlichkeitsstelle. Man könnte dann die ϑ-Funktion des Zählers gegen die des Nenners fortheben, sodafs sich die Funktion auf eine Konstante reduzieren müfste.

Diese Bemerkung findet auf elliptische Funktionen zweiter Art keine Anwendung, weil bei ihnen die Relation zwischen den a_ν und b_ν in Fortfall kommt. Natürlich sind unter den elliptischen Funktionen zweiter Art diejenigen des ersten Grades die allereinfachsten und wichtigsten. Wir sehen nun:

Unsere Parameter α, β, γ, δ sind in der Hermiteschen Terminologie gerade solche elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades. Die in kinematischer Hinsicht einfachsten Elemente der Kreiselbewegung erscheinen also auch in der analytischen Darstellung so einfach wie irgend möglich.

Nicht so einfach — und darin beruht gerade die analytische Überlegenheit unserer Parameter — stellt sich die explicite Darstellung der

*) In der pag. 151 citierten Schrift.

Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ oder richtiger ihrer trigonometrischen Funktionen.

Die Funktion $\cos\vartheta = u(t)$ haben wir schon im vorigen Paragraphen betrachtet. Diese Funktion ist, da sie bei Vermehrung des Argumentes um Perioden völlig ungeändert bleibt, eine elliptische Funktion erster Art, aber nicht vom ersten Grade (doppelperiodische Funktionen ersten Grades sind ja nach Obigem überhaupt unmöglich), sondern vom zweiten Grade. In der That sieht man sofort, dafs $u(t)$ an zwei (verschiedenen oder zusammenfallenden) Stellen des Periodenrechtecks null und unendlich wird. Dem Punkte $u = 0$ der u-Ebene entsprechen nämlich auf der Riemannschen Fläche zwei verschiedene Stellen, eine im unteren und eine im oberen Blatte, und daher auch in jedem Periodenrechtecke der t-Ebene zwei verschiedene Punkte. Die Stelle $u = \infty$ andrerseits ist ein Verzweigungspunkt; ihr Bild in der t-Ebene ($t = i\omega'$) ist daher doppelt zu zählen. Dementsprechend werden in der Darstellung der Funktion $u(t)$ vier ϑ-Funktionen auftreten, zwei im Zähler und zwei (unter sich gleiche, mit dem Argumente $t - i\omega'$) im Nenner.

Ahnlich liegt die Sache bei dem Winkel ψ. Zunächst werden wir, da der Multiplikator der logarithmischen Unendlichkeitsstellen von ψ nach pag. 400 $\pm\frac{i}{2}$ beträgt, statt ψ lieber $2i\psi$ betrachten. Dadurch kommen wir auch hier zu dem Multiplikator ± 1 zurück. Gehen wir nun zu der zugehörigen Exponentialfunktion $e^{2i\psi}$ über, so zeigen wir ebenso wie bei den α, β, γ, δ, dafs diese Funktion auf der Riemannschen Fläche unverzweigt und in der t-Ebene daher eindeutig ist. Ihre Null- und Unendlichkeitsstellen sind nach Früherem bekannt. Da ψ für $u = \pm 1$ logarithmisch unendlich wird, so verschwindet $e^{2i\psi}$ auf der Riemannschen Fläche an diesen beiden Stellen je in einem der beiden Blätter und wird in dem anderen Blatte von der ersten Ordnung unendlich.

Die entsprechenden Stellen der t-Ebene sind die Punkte $\pm ia$ und $\pm ib$ (bez. die äquivalenten Stellen). Auf diese vier Stellen verteilen sich also die Null- und Unendlichkeitsstellen von ψ. Dementsprechend wird sich die analytische Darstellung aus den ϑ-Funktionen: $\vartheta(t + ia)$, $\vartheta(t - ia)$, $\vartheta(t + ib)$, $\vartheta(t - ib)$ in dem Sinne zusammensetzen, dafs zwei dieser Funktionen im Zähler, zwei im Nenner auftreten. Wir haben es also jedenfalls mit einer *elliptischen Funktion zweiten Grades* zu thun. Aus den Eigenschaften des elliptischen Integrales für ψ folgt ferner, dafs $e^{2i\psi}$ beim Übergang zu einem anderen Periodenrechtecke der t-Ebene nicht ungeändert bleibt, sondern sich

mit einem von t unabhängigen Faktor multipliziert. $e^{2i\psi}$ stellt also wieder eine *elliptische Funktion zweiter Art dar.*

Berücksichtigen wir noch, dafs der Winkel φ sich ähnlich verhält wie ψ, so können wir zusammenfassend sagen:

Die trigonometrischen Funktionen

$$\cos\vartheta,\ \cos 2\psi + i\sin 2\psi,\ \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

der Eulerschen Winkel sind nicht, wie unsere Parameter α, β, γ, δ *elliptische Funktionen ersten, sondern zweiten Grades (und zwar teils von der ersten, teils von der zweiten Art).*

Übrigens können wir auch direkt die Darstellung der vorgenannten trigonometrischen Funktionen auf die Darstellung der α, β, γ, δ durch ϑ-Quotienten zurückführen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die Schemata (7) und (9) von pag. 20 und 21 zu vergleichen. Aus der letzten Horizontal- oder Vertikalreihe ergiebt sich nämlich:

$$(8')\qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma, & \sin\vartheta = \sqrt{-4\alpha\beta\gamma\delta}, \\ e^{2i\psi} = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}, & e^{2i\varphi} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (8) haben wir in diesen Gleichungen die *explicite Darstellung der Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit* vor uns.

Um diese Betrachtungen abzuschliefsen, haben wir noch die Bestimmung der Konstanten k_i und l_i aus den Gleichungen (8) nachzutragen.

Zunächst zeigen wir, dafs sich diese Konstanten paarweise auf einander reduzieren lassen, dafs wir nämlich haben:

$$(9)\qquad \begin{cases} l_4 = -l_1, & l_3 = -l_2, \\ k_4 = k_1, & k_3 = k_2. \end{cases}$$

Die beiden letzten Relationen ergeben sich folgendermafsen: Wir setzen in (8) $t = 0$ und erhalten zunächst, unter α_0, β_0, γ_0, δ_0 die Anfangswerte von α, β, γ, δ verstanden:

$$(10)\qquad \begin{cases} k_1 = \alpha_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-ia)}, & k_2 = \beta_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-\omega+ib)}, & k_3 = \gamma_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+\omega-ib)}, \\ & k_4 = \delta_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+ia)}. \end{cases}$$

Die α_0, β_0, γ_0, δ_0 können wir nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 durch die Anfangswerte ϑ_0, φ_0, ψ_0 der Eulerschen Winkel ausdrücken. Von diesen sind aber die Gröfsen φ_0, ψ_0, welche die Anfangslage der X- und x-Axe gegen die Knotenlinie angeben, gänzlich willkürlich. In der That hängt der Charakter der eintretenden Bewegung in keiner Weise davon ab, wie wir die X-Axe in der

Äquatorebene des Kreisels und die x-Axe in der Horizontalebene orientieren. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir also etwa anfangs die X- und x-Axe mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen, d. h. $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ nehmen.*) Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs $\alpha_0 = \delta_0$, $\beta_0 = \gamma_0$ ist. Gleichzeitig wird nach (10) mit Rücksicht darauf, dafs die hier vorkommenden ϑ-Quotienten paarweise gleich sind, wie behauptet wurde,

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3.$$

Die beiden ersten Relationen (9) folgern wir daraus, dafs die Produkte $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ leicht angebbare doppeltperiodische Funktionen sind. Wir haben nämlich (wieder nach den Gleichungen (8) von pag. 21):

$$\alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}. \tag{11}$$

Die beiden rechts stehenden Gröfsen sind aber ebenso wie u selbst doppeltperiodische Funktionen.

Wir wollen ihre Darstellung durch ϑ-Funktionen angeben. Es verschwindet $\frac{u+1}{2}$, wenn $u = -1$, d. h. $t = \pm ia$. Ebenso verschwindet $\frac{u-1}{2}$, wenn $u = +1$, d. h. $t = \pm(\omega - ib)$. Ferner wird sowohl $\frac{u+1}{2}$ wie $\frac{u-1}{2}$ unendlich, wenn $u = \infty$, d. h. $t = \pm i\omega'$ ist. Wir bilden nun die ϑ-Quotienten

$$\frac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dieses sind, (da beidemal die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist), direkt doppeltperiodische Funktionen von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$. Von diesen können sich unsere ϑ-Quotienten nur je um eine Konstante unterscheiden. Wir schreiben daher

$$\begin{cases} \dfrac{u+1}{2} = k^2 \dfrac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}, \\ \dfrac{u-1}{2} = k'^2 \dfrac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}. \end{cases} \tag{12}$$

*) Wollten wir diese vereinfachende Annahme nicht machen, so würden die α, β, γ, δ in den Schlufsformeln je mit einem Faktor vom absoluten Betrage 1 behaftet erscheinen, nämlich bez. mit

$$e^{\frac{i(\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(\varphi_0-\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0-\psi_0)}{2}},$$

welcher notwendig unbestimmt bleibt und für alles Folgende belanglos ist.

Die hier eingeführten Konstanten k^2 und k'^2 ergeben sich leicht, wenn wir in der ersten Gleichung (12) etwa $t = \omega + ib$ und dementsprechend $u = +1$, in der zweiten $t = ia$ und $u = -1$ setzen. Dann erhalten wir nämlich

$$(13) \qquad \begin{cases} k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}, \\ k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}. \end{cases}$$

Nunmehr tragen wir diese Werte von $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$ in (11) ein und setzen gleichzeitig für $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ die aus (8) sich ergebenden Ausdrücke. Dann heben sich die von t abhängigen ϑ-Quotienten heraus und wir erhalten:

$$k_1 k_4 e^{(l_1+l_4)t} = k^2,$$
$$k_2 k_3 e^{(l_2+l_3)t} = k'^2.$$

Es mufs also sein

$$l_1 + l_4 = 0, \quad l_2 + l_3 = 0$$
$$k_1 k_4 = k^2, \qquad k_2 k_3 = k'^2.$$

Die erste Reihe liefert die Bestätigung der in den Gleichungen (9) ausgesprochenen Behauptung. Die zweite Reihe giebt mit Rücksicht auf dieselben Gleichungen:

$$(14) \qquad k_1 = k_4 = k, \quad k_2 = k_3 = k'.$$

Die Bestimmung der Konstanten k_i ist damit geleistet; es erübrigt nur noch, ein Wort über die Vorzeichen zu sagen, mit denen die Quadratwurzeln in k und k' gerechnet werden sollen. Dieselben ergeben sich aus den Anfangswerten der α, β, γ, δ. Da φ_0 und ψ_0 gleich Null genommen wurden und $\frac{\vartheta_0}{2}$ jedenfalls einen spitzen Winkel bedeutet, also $\cos\frac{\vartheta_0}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ positive Gröfsen sind, so wird nach den Definitionsgleichungen der α, β, γ, δ von pag. 21 α_0 positiv reell, β_0 positiv imaginär. Die Vorzeichen von k und k' sind also so zu wählen, dafs sich für $t = 0$ aus den Gleichungen (8) von pag. 420 ein positiver Wert von α und ein positiv imaginärer Wert von β ergiebt. Berücksichtigt man nun, dafs, unter τ eine positive reelle Zahl $< 2\omega'$ verstanden, $\vartheta(+i\tau)$ positiv imaginär, $\vartheta(-i\tau)$ negativ imaginär, $\vartheta(\omega \pm i\tau)$ positiv reell, $\vartheta(-\omega \pm i\tau)$ negativ reell ist, wie leicht aus der Reihe (3) zu schliefsen ist, so erkennt man, *dafs k und k' beide reell sind, und dafs k mit positivem, k' mit negativem Vorzeichen zu rechnen sein wird.* Diese Vorzeichenbestimmung wolle man für das Folgende, wo wir nicht ausdrücklich darauf zurückkommen werden, im Gedächtnis behalten.

Schliefslich haben wir noch die gemeinsamen Werte der Konstanten l_1 und $-l_4$, sowie l_2 und $-l_3$ zu finden.

Zu dem Zweck differentiieren wir die erste der Gleichungen (8) logarithmisch nach t und finden zunächst:

$$(15) \qquad l_1 = \frac{d \log \alpha}{dt} - \frac{\vartheta'(t - ia)}{\vartheta(t - ia)} + \frac{\vartheta'(t - i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Hier setzen wir für t irgend einen speziellen Wert ein, z. B. $t = ia$. Dann zerstören sich rechterhand, wie wir sogleich nachweisen werden, die beiden ersten Terme gegenseitig und es ergiebt sich

$$(16) \qquad l_1 = \frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')}.$$

Für $t = ia$ wird nämlich $u = -1$, so dafs wir nach dem Taylorschen Satze haben:

$$(17) \qquad u + 1 = c(t - ia) + \cdots, \quad c = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia}.$$

Ferner schreiben wir

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{d \log \alpha}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Es wird aber nach pag. 402 für $u = -1$

$$\frac{d \log \alpha}{du} = \frac{1}{u + 1}$$

bis auf Terme, die mit $u + 1$ verschwinden. Wir haben also mit Rücksicht auf (17)

$$\left(\frac{d \log \alpha}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{1}{u + 1} \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{c}{u + 1} = \frac{1}{t - ia}.$$

Gleichzeitig wird, da die ϑ-Funktion eine ungerade Funktion ihres Argumentes ist, die mit ihrem Argument von der ersten Ordnung verschwindet:

$$\left(\frac{\vartheta'(t - ia)}{\vartheta(t - ia)}\right)_{t=ia} = \frac{1}{t - ia}$$

abermals bis auf Terme, welche mit $t - ia$ oder $u + 1$ verschwinden. Die beiden unendlich werdenden ersten Terme in Gleichung (15) heben sich also in der That für $t = ia$ gegenseitig auf und es ergiebt sich für l_1 der in (16) angegebene einfache Wert.

In ganz entsprechender Weise findet man für l_2 den Wert

$$(16') \qquad l_2 = \frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega')}.$$

Die somit bestimmten Gröfsen l_i sind, wie man sich leicht überzeugt, sämtlich rein imaginär. Aus der Definitionsgleichung (3) der ϑ-Funktion folgt nämlich, dafs diese Funktion für ein rein imaginäres

Argument selbst rein imaginär ist, und dafs gleichzeitig ihr Differentialquotient reell wird. Dasselbe findet statt, wie ebenfalls aus Gleichung (3) ersichtlich, wenn der reelle Teil des Argumentes (wie in dem Ausdrucke von l_2) gleich $-\omega$ ist. Wir schreiben daher, indem wir unter l und l' zwei reelle Gröfsen verstehen, $l_1 = il$, $l_2 = il'$.

Die vollständige Tabelle der Konstanten l_i und k_i, durch welche unsere letzten Resultate zusammengefafst werden, lautet nun folgendermafsen:

$$(18)\quad \begin{cases} k_1 = k\,, \quad k_2 = k'\,, \quad k_3 = \quad k'\,, \quad k_4 = \quad k \\ l_1 = il, \quad l_2 = il', \quad l_3 = -il', \quad l_4 = -il \\ k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}\,, \quad k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)} \\ l = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}\,, \quad l' = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)}\,. \end{cases}$$

Tragen wir diese Werte der Konstanten in die Formeln (8) *von pag. 420 ein, so sind unsere Parameter* α, β, δ, γ *in sehr übersichtlicher Weise als Funktionen von* t *dargestellt.*

Hinsichtlich der Konstanten des Problems kann man dabei noch einen doppelten Standpunkt einnehmen.

Man kann erstens, wie es in den früheren Entwickelungen stets geschah, diejenigen Gröfsen, durch welche die Anfangslage und Anfangsbewegung sowie die Massenverteilung des Kugelkreisels gegeben wird, als die fundamentalen Konstanten des Problems ansehen. Es waren dieses die Gröfsen e, n, N, P und A, wobei es aber, wie man leicht erkennt, bei den letztgenannten vier Gröfsen nur auf die Verhältnisse $n : N : P : A$ ankommt. Diese vier Gröfsen stellen also zusammen mit e nur vier wesentliche numerische Daten vor. Wir wollen diese vier Daten die *„elementaren Konstanten des Problems“* nennen. Von diesem ersten Standpunkte aus hätte man, bevor man unsere Schlufsformeln anwenden kann, die mit ω, ω', a und b bezeichneten Werte des Integrals erster Gattung aus den elementaren Konstanten zu berechnen, wofür die geeigneten Methoden im vierten Kapitel entwickelt sind.

Man kann zweitens aber auch eben diese vier Integralwerte als die fundamentalen, den Kugelkreisel charakterisierenden Daten ansehen und kann diese in ganz beliebiger Weise als reelle Gröfsen vorgeben. Wir nennen diese vier Gröfsen kurzweg die *„transcendenten Konstanten des Problems“*. Von diesem zweiten Standpunkte aus ist die Kenntnis der elementaren Konstanten für die Beherrschung der Bewegungen überflüssig, da in den Schlufsformeln nur die als gegeben angenommenen transcendenten Konstanten vorkommen. Übrigens lassen sich umgekehrt jene aus diesen mit Hülfe von ϑ-Reihen jederzeit berechnen.

Das Voranstellen der elementaren Konstanten liegt allerdings in geometrischer und mechanischer Hinsicht zunächst näher. Indessen bringt die Bevorzugung der transcendenten Konstanten in analytischer Hinsicht den Vorteil gröfserer Symmetrie und Einfachheit mit sich, so dafs wir von den beiden eben genannten Standpunkten den zweiten als den höheren und analytisch befriedigenderen bezeichnen möchten. Er wird namentlich in den späteren Paragraphen dieses Kapitels für uns mafsgebend sein.

Zum Schlufs einige historische Notizen.

Als erster hat sich mit der Darstellung der Bewegung des schweren Kreisels durch elliptische Funktionen Jacobi*) beschäftigt. Indessen ist er nicht dazu gekommen, seine Resultate zu publizieren. In der Litteratur wird der Gegenstand im Anschlufs an Jacobi zum ersten Male von Lottner**) behandelt, der auch die bezüglichen Teile des Jacobischen Nachlasses herausgegeben hat. Beide Autoren gehen darauf aus, die neun Richtungscosinusse, welche die Axen des beweglichen mit dem festen Koordinatensystem***) bilden, durch ϑ-Funktionen auszudrücken. Wir haben die Darstellung der neun Richtungscosinusse auf Grund unserer Darstellung der α, β, γ, δ unmittelbar in der Hand. Wir brauchen nur die Werte der letzteren in das Schema (9) von pag. 21 einzutragen, wobei sich elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades ergeben würden, und Reelles und Imaginäres zu trennen. Da dieses Verfahren indessen den Übergang von dem Einfacheren zum Komplizierteren bedeuten würde, so können wir auf seine Durchführung füglich verzichten.

Ganz nahe der Einführung unserer α, β, γ, δ kommt Hr. W. Hefs†) in einer Arbeit „Über das Gyroskop“. Gegen Ende derselben findet sich als Resultat ziemlich umfangreicher, an die Lottnersche Darstellung anschliefsender Rechnungen die Bemerkung, dafs die „Elemente der Eulerschen Rotation“, d. h. in unserer Bezeichnung die Quaternionengröfsen

$$A = \frac{\beta + \gamma}{2i}, \quad B = \frac{-\beta + \gamma}{2}, \quad C = \frac{\alpha - \delta}{2i}, \quad D = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

*) Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave etc. und Sur la rotation d'un corps etc. Ges. W. Bd. II, p. 477 und 493.

**) Reduktion eines schweren, um einen festen Punkt rotierenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, Crelles Journ. Bd. 50, 1855.

***) Genau genommen handelt es sich bei Jacobi und Lottner um zwei Axenkreuze, welche sich relativ gegen die genannten mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Z- bez. z-Axe drehen. Die Einführung dieser Koordinatensysteme entspricht zum Teil der Reduktion des schweren symmetrischen Kreisels auf den Kugelkreisel, zum Teil der Absonderung eines Präcessionsbestandteils von dem rein periodischen Nutationsbestandteile der Bewegung.

†) Math. Annalen Bd. 29, 1887, vgl. insbesondere die beiden letzten Seiten.

ein viel einfacheres Gepräge zeigen, wie die Richtungscosinus, welche Jacobi und Lottner betrachten, „indem erstere nur von je einem, letztere dagegen von zwei konstanten Parametern abhängig sind", d. h. in unserer Terminologie, indem erstere im Wesentlichen elliptische Funktionen ersten, letztere dagegen zweiten Grades sind. Indessen hat der Verfasser aus dieser Bemerkung keine weiteren Konsequenzen gezogen, wie denn die Quaternionengröfsen hier nur ganz beiläufig und keineswegs als Grundlage der Theorie auftreten.

§ 5. Die Bahnkurve der Kreiselspitze, Polhodie- und Herpolhodiekurve u. s. w., dargestellt durch ϑ-Quotienten.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln enthalten implicite die Beantwortung aller Fragen, welche die Kreiselbewegung betreffen. Es kann sich im Folgenden nur noch darum handeln, die Konsequenzen der allgemeinen analytischen Darstellung bezüglich einiger besonderer Punkte ausdrücklich hervorzuheben.

Unser Hauptinteresse haben wir früher auf die Schilderung der „Bahnkurve" gerichtet. Wir wollen daher auch hier zunächst nach der Bahnkurve der Kreiselspitze fragen. Wir werden sehen, dafs ihre Gleichung mit Hülfe der ϑ-Funktionen äufserst elegant herauskommt.

Dabei haben wir jetzt die geometrisch-funktionentheoretischen Methoden des ersten Kapitels (vgl. § 3 desselben) wieder aufzunehmen.

Wir betrachteten dort (vgl. pag. 29) zwei vereinigt gelegene Einheitskugeln mit dem Mittelpunkte in O, eine im Raume und eine im Kreisel feste, welche im Riemannschen Sinne Träger je einer komplexen Variabeln λ und Λ waren. Die Variable λ, welche den Punkten der im Raume festen Einheitskugel zugeordnet war, hing mit den rechtwinkligen Koordinaten xyz dieser Punkte durch die Gleichung zusammen (s. pag. 28, Gleichung (11)):

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{1}$$

Ebenso lautet die Beziehung zwischen der Variabeln Λ und den rechtwinkligen Koordinaten XYZ der im Kreisel festen Punkte der zweiten Einheitskugel:

$$\Lambda = \frac{X + iY}{1 - Z}. \tag{1'}$$

Endlich aber besteht zwischen den Variabeln λ und Λ, welche je zwei momentan zusammenfallenden Punkten der beiden Kugeln entsprechen, die folgende einfache Relation:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \tag{2}$$

in der die α, β, γ, δ dieselben Gröfsen sind, die wir im vorigen Paragraphen als Funktionen von t darstellten.

Um von hieraus zur Bahnkurve der Kreiselspitze zu gelangen, setzen wir in (1′) die Koordinaten X, Y, Z der Kreiselspitze, nämlich $X = 0$, $Y = 0$, $Z = +\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$ ein, wobei $\Lambda = \infty$ wird. Vermöge dieses Wertes geht Gleichung (2) über in

$$\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Hier tragen wir die Werte von α und γ aus dem vorigen Paragraphen ein und erhalten zunächst

$$\lambda = \frac{k}{k'} e^{i(l+l')t} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)} \frac{\vartheta(t + i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Berücksichtigen wir noch die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen, so können wir setzen:

$$(3) \quad \frac{\vartheta(t + i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')} = -e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}, \qquad \frac{k^2}{k'^2} = \frac{\vartheta^2(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta^2(ia - i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{\omega}(\omega + ib - ia)}.$$

Somit wird bei richtiger Vorzeichenbestimmung (vgl. pag. 426 unten)

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(ia - i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega + ib - ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Bahnkurve. *Wie wir sehen, bestimmt sich die Bahnkurve der Kreiselspitze wieder durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.*

Um die einfache geometrische Bedeutung unserer Darstellungsweise zu verstehen, erinnern wir an die geometrische Bedeutung der komplexen Variabeln λ. Wir bezogen die Einheitskugel, deren Punkte durch die Variable λ unterschieden waren, mittels stereographischer Projektion vom Nordpol der Einheitskugel auf ihre Äquatorebene. Alsdann war λ derjenige komplexe Wert, welcher dem stereographischen Bilde des einzelnen Kugelpunktes nach der üblichen Gaufsischen Deutung der imaginären Gröfsen zukommt. Wir brauchen λ nur in einen reellen und imaginären Bestandteil aufzulösen, um die rechtwinkligen Koordinaten des stereographischen Bildpunktes in der Äquatorebene zu erhalten.

Die Gleichung (4) liefert daher direkt das ebene stereographische Bild der im Raume verlaufenden Bahnkurve; sie kann unmittelbar als Unterlage für die zeichnerische Darstellung der Bahnkurve in stereographischer Projektion dienen.

Wir erinnern ferner daran, dafs (vgl. pag. 207) für die Zwecke der Zeichnung die stereographische Projektion vor der sonst üblichen orthographischen gewisse Vorzüge voraus hat. Es ist erfreulich, dafs unsere analytische Darstellung der Bahnkurve sich gerade mit dem praktischen Bedürfnisse der Zeichnung deckt.

Vergleichen wir hiermit diejenige Darstellung der Bahnkurve, welche der *orthographischen* Projektion auf die Äquatorebene entspricht.

Wir gelangen zu dieser, wenn wir nach den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Kreiselspitze im Raume fragen; sehen wir hier von der dritten Koordinate z ab, so bestimmen uns die beiden übrigen die gewünschte orthographische Projektion. Übrigens empfiehlt es sich, von den x, y selbst zu der komplexen Verbindung derselben $\xi = x + iy$ (oder $\eta = -x + iy$) im Sinne von pag. 20 überzugehen, also auch das orthographische Bild der Kreiselspitze, wie vorher das stereographische, durch eine in der Äquatorebene ausgebreitete komplexe Variable festzulegen.

Nun lauten die Koordinaten der Kreiselspitze in dem mit dem Kreisel fest verbundenen XYZ-System bez. $X = Y = 0$, $Z = 1$. Die zugehörigen pag. 20 definierten komplexen Verbindungen werden daher $\Xi = \mathsf{H} = 0$, $\mathsf{Z} = -1$. Den gesuchten Wert von ξ, ausgedrückt durch unsere α, β, γ, δ entnehmen wir darauf dem Schema (9) von pag. 21. Er wird

$$\xi = -2\alpha\beta.$$

Tragen wir hier die Werte von α und β ein, so erhalten wir als Gleichung der Bahnkurve in orthographischer Projektion die folgende:

$$(5)\quad \xi = Ke^{iLt}\frac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}, \quad K = -2kk', \quad L = l + l'.$$

Diese Darstellung steht ersichtlich der früheren an Einfachheit nach. *Die Bahnkurve in orthographischer Projektion bestimmt sich durch eine elliptische Funktion (zweiter Art) zweiten Grades, während sie bei stereographischer Projektion durch eine elliptische Funktion ersten Grades, einen einfachen ϑ-Quotienten, gegeben wird.*

Dafs dieser Umstand nicht zu unterschätzen ist, wird im folgenden Paragraphen klar werden, wenn wir uns zur numerischen Berechnung der Bahnkurve wenden. Da wir in (5) vier (resp. drei verschiedene) ϑ-Werte, in (4) dagegen nur zwei solche Werte nötig haben, so wird die Rechenarbeit bei orthographischer Projektion der Bahnkurve nahezu die doppelte von der Arbeit, welche die Berechnung der stereographisch projicierten Bahnkurve verursacht.

Die Darstellung (5) hat Hermite in seiner p. 151 citierten Schrift bei der Behandlung des sphärischen Pendels gewählt.

Übrigens hatten wir in den Figurenserien von Kapitel IV als Projektionscentrum bei der stereographischen Abbildung nicht den Nordpol, sondern den Südpol der festen Einheitskugel gewählt. Es empfiehlt sich dies immer dann, wenn die Bahnkurve ganz oder hauptsächlich auf der nördlichen Halbkugel verläuft, weil sonst das stereographische Bild übermäfsig vergröfsert und verzerrt erscheinen würde. Wir können aber leicht von der einen Projektionsart zu der anderen übergehen. Geometrisch erreichen wir dies durch eine sog. Inversion am Einheitskreise der xy-Ebene; dem entspricht analytisch, dafs wir den Wert der komplexen Variabeln λ ersetzen durch den konjugiert reciproken Wert $1 : \bar{\lambda}$. Nehmen wir diesen Übergang in Gleichung (4) vor, so ergiebt sich für die stereographische Projektion vom Südpol die folgende Darstellung:

$$(4') \quad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega-ib+ia)}, \quad L = l+l'-\dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Ohne die geringste Mühe können wir nun auch die Bahnkurve angeben, welche ein ganz beliebiger Punkt des Kreisels bei der Bewegung beschreibt. Wir wollen der Kürze halber annehmen, dafs der betreffende Punkt von O den Abstand 1 habe, so dafs er dauernd mit einem Punkte der beweglichen Kugel zusammenfällt. (Im anderen Falle brauchten wir die anzugebende Formel nur mit der Entfernung des Punktes von O zu multiplizieren.) Wir charakterisieren dann die Lage unseres Punktes auf der beweglichen Kugel durch den komplexen Wert $\Lambda = \Lambda_0$ in der früher beschriebenen Weise. Die wechselnden Lagen des Punktes im Raume, d. h. die gesuchte Bahnkurve bez. ihr durch stereographische Projektion vom Nordpole erhaltenes ebenes Abbild wird darauf nach Gleichung (2) gegeben durch

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\alpha\Lambda_0+\beta}{\gamma\Lambda_0+\delta}.$$

Die in Gleichung (6) enthaltenen Ausdrücke sind bei beliebigem Λ_0 nicht mehr direkt elliptische Funktionen erster oder zweiter Art, sondern nur mehr lineare Kombinationen von solchen. —

Die vorstehenden Entwickelungen gelten wie alle Resultate dieses Kapitels zunächst nur für den Fall des Kugelkreisels. Wir können aber von hier aus nach § 5 des vierten Kapitels sehr leicht zu einem symmetrischen Kreisel übergehen, welcher dasselbe äquatoriale Trägheitsmoment A wie der Kugelkreisel und ein beliebiges Trägheitsmoment C um die Figurenaxe hat; dies soll an den Gleichungen der Bahnkurve wirklich ausgeführt werden.

Zu dem Zwecke haben wir nach pag. 234 die Geschwindigkeitskoordinate φ' des Kugelkreisels um die konstante Gröfse

$$N\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right),$$

welche wir mit c bezeichnen wollen, zu vermehren, während ϑ und ψ ungeändert bleiben. Die entsprechenden Änderungen der α, β, γ, δ bestehen (vgl. die ursprüngliche Definition dieser Gröfsen auf pag. 21) darin, dafs wir

(7)

	α	β	γ	δ
mit	$e^{+\frac{ic}{2}t}$	$e^{-\frac{ic}{2}t}$	$e^{+\frac{ic}{2}t}$	$e^{-\frac{ic}{2}t}$

multiplizieren. Infolgedessen lautet die Gleichung für die Bahnkurve eines Punktes Λ_0 beim symmetrischen Kreisel folgendermafsen:

$$\lambda = \frac{\alpha e^{ict}\Lambda_0 + \beta}{\gamma e^{ict}\Lambda_0 + \delta},$$

wo die α, β, γ, δ die Werte dieser Parameter beim Kugelkreisel bedeuten. Insbesondere ergiebt sich für die Bahnkurve der Kreiselspitze ($\Lambda_0 = \infty$) beim symmetrischen genau dieselbe Gleichung wie beim Kugelkreisel — wie dies nach § 5 des vierten Kapitels selbstverständlich ist. —

Wir gehen jetzt dazu über, in ähnlicher Weise die *Gleichungen der Polhodie- und Herpolhodiekurve des Kugelkreisels* abzuleiten, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Drehungsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Die Koordinaten dieses Punktes bezeichnen wir wie früher mit

$$p,\ q,\ r \quad \text{oder} \quad \pi,\ \varkappa,\ \varrho,$$

je nachdem wir sie auf das im Kreisel oder im Raume feste System beziehen. Dabei sind die dritten Koordinaten r und ϱ beim Kugelkreisel natürlich konstant, da sie aus den Impulskomponenten N und n durch Division mit dem Trägheitsmomente A hervorgehen. Die beiden ersten Koordinaten fassen wir in die komplexen Verbindungen $p + iq$, $\pi + i\varkappa$ zusammen und entnehmen die Ausdrücke dieser Gröfsen sowie der Konstanten r und ϱ durch die α, β, γ, δ den Gleichungen (5) und (6) von pag. 43, 44:

(8)
$$\begin{cases} p + iq = 2i\left(+\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right), \\ -r = 2i\left(-\alpha\frac{d\delta}{dt} + \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

$$(8') \qquad \begin{cases} \pi + i\varkappa = 2i\left(+\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right), \\ -\varrho = 2i\left(+\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

Setzen wir hier die Werte der α, β, γ, δ ein, so haben wir die explicite Darstellung der Koordinaten von Polhodie- und Herpolhodiekurve vor uns. Die beiden ersten Gleichungen für sich betrachtet, liefern uns dabei die orthographische Projektion der Polhodiekurve auf die Äquatorebene des Kreisels bez. der Herpolhodiekurve auf die Horizontalebene. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen gleichzeitig die Höhe, in welcher unsere Kurven über der Äquatorebene bez., über der Horizontalebene verlaufen.

Wir wollen zeigen, daſs sich die vorstehenden Gleichungen in sehr bemerkenswerter Weise zusammenziehen. Betrachten wir z. B. $p + iq$:

Wir schreiben

$$(9) \qquad p + iq = 2i\beta\delta\Theta$$

und überzeugen uns zunächst, daſs die Gröſse

$$\Theta = \frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}$$

eine doppeltperiodische Funktion zweiten Grades ist. Wir bemerken nämlich allgemein, daſs die Funktion

$$\frac{d\log\vartheta(t-t_0)}{dt}$$

nach den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion überhaupt ungeändert bleibt bez. sich um $-\frac{\pi i}{\omega}$ additiv vermehrt, wenn wir zum Argument 2ω bez. $2i\omega'$ hinzufügen. Mithin wird die Differenz zweier solcher Funktionen jedenfalls eine doppeltperiodische Funktion. Aus solchen Differenzen und konstanten Gliedern setzt sich aber unsere Gröſse Θ zusammen.

Der explicite Ausdruck von Θ läſst sich den Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zufolge nach einigen leichten Reduktionen folgendermaſsen schreiben:

$$\Theta = -\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega + ib - i\omega')}{\vartheta(\omega + ib - i\omega')} + \frac{\vartheta'(t + ia)}{\vartheta(t + ia)} - \frac{\vartheta'(t - \omega + ib)}{\vartheta(t - \omega + ib)}.$$

Die im Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen von Θ sind hiernach ersichtlich $t = -ia$ und $t = \omega - ib$. Ferner werden die Nullstellen sein

$$t = -i\omega' \quad \text{und} \quad t = \omega + i\omega' - ia - ib;$$

im ersteren Falle kompensieren sich nämlich das erste und dritte sowie das zweite und vierte Glied, im letzteren Falle das zweite und dritte sowie das erste und vierte Glied.

Hiernach können wir unserer Gröfse Θ auch die Gestalt geben:

$$\Theta = C\,\frac{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}; \tag{10}$$

der rechts stehende Ausdruck ist nämlich, da die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist, eine doppeltperiodische Funktion von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie Θ. Die hinzugefügte Gröfse C ist eine Konstante.

Gleichung (9) nimmt nun folgende einfache Gestalt an:

$$p+iq = Ke^{i(l'-l)t}\,\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}. \tag{11}$$

Um die Konstante K zu bestimmen, in welche die soeben benutzte noch unbekannte Gröfse C eingeht, vergleichen wir die Werte von $p+iq$ aus (11) und (8) für einen geeignet gewählten Zeitpunkt t. Wir haben z. B. für $t=-ia$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = k\,e^{-la}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(-ia+i\omega')}, \quad \beta = k'e^{l'a}\,\frac{\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

also wird nach (8)

$$p+iq = 2ikk'e^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(ia+i\omega')};$$

andrerseits ergiebt sich aus (11):

$$p+iq = Ke^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta(+\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

mithin folgt

$$K = 2ikk'\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}.$$

Setzen wir endlich noch für k und k' die Werte aus den Gleichungen (18) von pag. 428 ein, so erhalten wir einfach:

$$K = \frac{-2\,\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+ia+ib)}\,e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}}. \tag{11'}$$

Durch die Gleichungen (11) und (11′) ist die Polhodiekurve in orthographischer Projektion dargestellt. Wir heben die Einfachheit dieser Darstellung besonders hervor, indem wir bemerken:

Die komplexe Variable, welche die senkrechte Projektion des Drehungsvektors auf die Aquatorebene des Kreisels bestimmt, ist wieder direkt eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.

Um auch die dritte Komponente r, welche, wie bemerkt, konstant $\left(=\frac{N}{A}\right)$ ist, durch unsere transcendenten Konstanten ω, ω', a und b

auszudrücken, können wir in Gleichung (8) einen speziellen Wert von t einsetzen. Wir wählen z. B. $t = \omega + ib$, wobei $\gamma = 0$ und (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$ wird. Alsdann ergiebt sich

$$-r = -2i\alpha\delta\frac{d\log\delta}{dt} = -2i\frac{d\log\delta}{dt}$$
$$= 2i\left(il - \frac{\vartheta'(\omega+ia+ib)}{\vartheta(\omega+ia+ib)} + \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)}\right),$$

also, wenn wir den Wert von l eintragen:

$$(12)\quad -r = 2i\left(-\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)} + \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)} - \frac{\vartheta'(\omega+ia+ib)}{\vartheta(\omega+ia+ib)}\right).$$

Die entsprechende *Darstellung der Herpolhodiekurve* können wir aus den vorstehenden Gleichungen der Polhodiekurve unmittelbar abnehmen. Wir erhielten nämlich pag. 44 die Koordinaten $-\pi$, $-\varkappa$, $-\varrho$ aus den Koordinaten p, q, r, indem wir α und δ vertauschten und β und γ im Vorzeichen umkehrten.

Diese Vertauschung und Vorzeichenveränderung können wir aber, wie eine genaue Prüfung der Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zeigt, einfach dadurch erreichen, dafs wir $-a$ statt $+a$ schreiben, wobei $-l$ in $l - \frac{\pi}{\omega}$ übergeht. *Die Gleichungen der Herpolhodiekurve können wir daher folgendermafsen schreiben:*

$$(13)\quad \pi + i\varkappa = K' e^{i\left(t+t'-\frac{\pi}{\omega}\right)t}\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')},$$

$$(13')\qquad K' = \frac{2\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega-ia+ib)}e^{\frac{\pi(b-a)}{2\omega}},$$

$$(14)\qquad -\varrho = 2i\left(\frac{\vartheta'(i\omega'+ia)}{\vartheta(i\omega'+ia)} - \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)} + \frac{\vartheta'(\omega-ia+ib)}{\vartheta(\omega-ia+ib)}\right).$$

Zu denselben Gleichungen gelangen wir auch von dem pag. 238 entwickelten Prinzip aus, nach welchem wir nur, um von der Polhodie- zu der Herpolhodiekurve überzugehen, die Werte von n, N bez. durch $-N$, $-n$ zu ersetzen und die Vorzeichen der Koordinaten umzukehren brauchen. Thun wir dieses, so wird die Ungleichung

$$N > n > 0,$$

welche der bisherigen Darstellung der α, β, γ, δ durch ϑ-Quotienten zu Grunde lag, in dem Sinne abgeändert, dafs für die einzutragenden Werte $N = -n$, $n = -N$ die Beziehung gilt:

$$0 > N > n.$$

Wie sich in diesem Falle die logarithmischen Unendlichkeitsstellen der α, β, γ, δ auf die Punkte ± 1 der Riemannschen Fläche verteilen,

wurde in Fig. 61 b dargestellt. Wir ersehen aus ihr, dafs die Nullstellen von β und γ durch die vorgenannte Vertauschung nicht geändert werden, dafs aber die von α und δ, d. h. die Stellen $\mp ia$ der t-Ebene sich austauschen. Wir haben also wieder die Vorzeichenumkehr von a und damit den Übergang von (11), (12) zu (13), (14).

Die soeben entwickelten Gleichungen können sofort auch zur Darstellung der Impulskurven dienen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Da nämlich die letzteren Kurven beim Kugelkreisel zu den Kurven der Polhodie und Herpolhodie in dem geometrischen Verhältnisse der Ähnlichkeit stehen, so brauchen wir die Gleichungen (11), (12), (13) und (14) rechterhand nur mit dem Werte des Trägheitsmomentes A zu multiplizieren, um die Darstellung der Impulskoordinaten $L + iM$, N, $l + im$, n zu erhalten. Wir sprechen daraufhin den zusammenfassenden Satz aus:

Die zuletzt betrachteten Kurven, die Impulskurven sowie die Polhodie- und Herpolhodiekurve lassen sich beim Kugelkreisel sämtlich durch elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades berechnen.

Dieses Resultat bleibt auch beim Übergange zum symmetrischen Kreisel bestehen, soweit es sich auf die Impulskurven und auf die Polhodiekurve bezieht.

Die *Polhodiekurve des symmetrischen Kreisels* können wir nämlich aus der des Kugelkreisels dadurch ableiten, dafs wir in der ersten der Gleichungen (8) die α, β, γ, δ des Kugelkreisels mit den in (7) angegebenen Faktoren multiplizieren. Dementsprechend haben wir für $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ bez.

$$e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{ic}{2}\beta\right), \quad e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\delta}{dt} - \frac{ic}{2}\delta\right)$$

einzutragen, unter β, δ, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ die Werte dieser Gröfsen beim Kugelkreisel verstanden. Da sich die hinzutretenden Terme $-\frac{ic}{2}\beta$ und $-\frac{ic}{2}\delta$ in der auf der rechten Seite von (8) stehenden Differenz aufheben, so brauchen wir die rechte Seite von (11) nur mit dem Faktor e^{-ict} zu multiplizieren, um die Gröfse $p + iq$ des symmetrischen Kreisels zu erhalten. Diese wird also ebenfalls durch eine elliptische Funktion ersten Grades gegeben.

Von den Koordinaten der Polhodiekurve unterscheiden sich die Koordinaten derjenigen Impulskurve, welche den *Ort des Impuls-Endpunktes im Körper* darstellt, nur um die konstanten Faktoren der Hauptträgheitsmomente. Diese Kurve wird also im Wesentlichen durch dieselben Gleichungen wie die Polhodiekurve beschrieben.

Was endlich die *Bahn des Impuls-Endpunktes im Raume* betrifft, so unterscheidet sich diese beim symmetrischen Kreisel von derselben Kurve beim Kugelkreisel überhaupt nicht. In der That sahen wir Kap. IV, § 5, dafs diese Kurve für alle Kreisel der l. c. betrachteten Serie genau dieselbe ist. Die Gleichungen (13) und (14) geben also (nach Multiplikation mit A) direkt die in Rede stehende Impulskurve für einen symmetrischen Kreisel, dessen eines Hauptträgheitsmoment A dem unseres Kugelkreisels gleich und dessen anderes Hauptträgheitsmoment C beliebig ist.

Weniger einfach wird die Darstellung der *Herpolhodiekurve beim symmetrischen Kreisel.* Um auch hier aus den vorhergehenden Umrechnungen Nutzen zu ziehen, drücken wir in der allgemeingültigen Gleichung (8′) die α, β, γ, δ des symmetrischen Kreisels durch die des Kugelkreisels nach der Tabelle (7) aus und bekommen:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt}\right) + 2c\alpha\beta.$$

Den ersten Term der rechten Seite haben wir oben in (13) auf seine einfachste Form gebracht. Im zweiten Term setzen wir die bekannten Werte von α und β ein, wobei wir die multiplizierende Konstante kurz mit K bezeichnen. Es ergiebt sich dann:

$$\pi + i\varkappa = e^{i(l+l')t}\left(K'e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')} + K\frac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\right),$$

oder

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l}\pi + i\varkappa = \\ e^{i(l+l')t}\,\dfrac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\left(K + K'e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}\,\dfrac{\vartheta(t-i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}\right).\end{array}\right.$$

Wir behaupten, dafs dieser Ausdruck abermals als ϑ-Quotient geschrieben werden kann, wobei aber zwei ϑ-Funktionen im Zähler und zwei im Nenner auftreten. Zunächst folgt aus den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen, dafs die Klammer völlig ungeändert bleibt bei Vermehrung von t um eine der Perioden 2ω, $2i\omega'$. Die Klammer ist also eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades mit den Unendlichkeitsstellen $t = ia$ und $t = \omega - ib$. Eine solche Funktion besitzt, wie pag. 421 erwähnt, in dem einzelnen Periodenparallelogramm notwendig zwei Nullstellen, welche wir mit c_1 und c_2 bezeichnen, und kann durch den folgenden ϑ-Quotienten dargestellt werden

$$K_1\,\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}.$$

Tragen wir aber diesen Wert der Klammer in (15) ein, so folgt in der That:

$$(16)\qquad \pi + i\varkappa = K_1 e^{i(l+l')t}\,\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta^2(t-i\omega')}.$$

Auf die genauere Bestimmung von c_1, c_2 und K_1 wollen wir nicht eingehen. Wir konstatieren nur:

*Die Horizontalprojektion der Herpolhodiekurve ist beim symmetrischen Kreisel durch eine elliptische Funktion zweiter Art zweiten Grades gegeben.**)

In ähnlicher Weise können wir, von der zweiten der Gleichungen (8′) ausgehend, die *Vertikalprojektion* ϱ *der Herpolhodie* bestimmen. Wir finden für diese *eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades*, nämlich eine lineare Funktion der doppelperiodischen Gröfse $\cos\vartheta = u(t)$, wie bereits aus Gleichung (2) von pag. 235 hervorgeht. —

Zum Schlufs eine Bemerkung allgemeineren Inhalts. Wir sind im Vorstehenden zu wiederholten Malen auf elliptische Kurven zweiter Art geführt worden. Solche Kurven treten aufser bei dem schweren symmetrischen Kreisel auch bei dem kräftefreien unsymmetrischen Kreisel auf (vgl. § 8 dieses Kapitels), sowie in zahlreichen anderen geometrischen und mechanischen Problemen (als sphärische Kettenlinie, als sog. elastische Kurve etc. etc.). Sie bilden eine grofse Klasse unter sich verwandter transcendenter Kurven, welche in geometrischer Hinsicht und namentlich auch mit Rücksicht auf die Anwendungen den algebraischen Kurven an Interesse nicht nachstehen. Es wäre daher wohl der Mühe wert, allgemein eine *geometrische Theorie dieser transcendenten Kurven* aufzustellen, nach denselben Gesichtspunkten, die für die Theorie der algebraischen Kurven mafsgebend sind. Man hätte dann etwa die möglichen Singularitäten solcher Kurven zu untersuchen, Schnittpunktssätze zu erforschen, die gestaltlichen Verhältnisse zu diskutieren etc. Unsere elliptischen Kurven ersten Grades würden in dieser Theorie natürlich eine besonders wichtige Rolle spielen. Ohne Frage öffnet sich hier der geometrischen Forschung ein schönes und verhältnismäfsig leichten Erfolg versprechendes Gebiet.

§ 6. Numerische Berechnung der Bewegung durch ϑ-Reihen.

Eines der Endziele, die wir bei jedem Problem der Mechanik im Auge haben müssen, wird jedenfalls dieses sein: Die Bewegung soweit zu beherrschen, dafs wir die Lage des beweglichen Systems in jedem Augenblicke numerisch bestimmen können. Dafs dieses Ziel durch die

---

*) Sollte es nicht möglich sein, auch diese Kurve, welche ja nach pag. 235 auf einer gewissen Kugel verläuft, durch elliptische Funktionen *ersten* Grades darzustellen, indem man sie stereographisch auf die Äquatorebene der sie tragenden Kugel projiciert und nach der Gleichung für die komplexe Variable des stereographischen Bildpunktes fragt?

vorangehende Theorie auf bequemem Wege erreicht wird, soll in diesem Paragraphen dargethan werden. Zunächst möge das einzuschlagende Verfahren allgemein skizziert werden.

Ist uns irgend ein realer Kreisel gegeben, so besteht der erste Schritt darin, dafs wir, sei es durch das Experiment, sei es durch Berechnung, seine Massenverteilung, d. h. die auf den Unterstützungspunkt bezogenen Werte von A, C und P, festzustellen suchen.

Sodann müssen wir Anfangslage und Anfangsbewegung des Kreisels kennen. Die Anfangslage wird hinlänglich durch den Neigungswinkel ϑ_0 der Figurenaxe gegen die Vertikale beschrieben; die Anfangswerte der Winkel φ und ψ, welche für den Charakter der Bewegung belanglos sind, werden wir wie pag. 425 direkt gleich 0 nehmen.

Die Anfangsbewegung charakterisieren wir am besten durch die Lage und Gröfse des Impulsvektors. Gestatten wir uns die pag. 199 sub 4 verabredete Vereinfachung, dafs der Impulsvektor zu Anfang in derselben Vertikalebene wie die Figurenaxe enthalten sei, so wird unser Vektor durch seine beiden Komponenten n und N festgelegt. Wir wissen dann gleichzeitig, dafs der Parallelkreis $u = \cos\vartheta_0 = e$ einer der Begrenzungskreise für die Bahnkurve sein und dafs die Kreiselspitze zu Beginn in horizontaler Richtung fortschreiten mufs.

Mittels der Konstanten n, N und e bilden wir uns darauf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, deren Wurzeln den zweiten Begrenzungskreis e' sowie die Gröfse e'' definieren.

Jetzt sind wir in der Lage, die Legendresche Theorie der elliptischen Integrale und die Legendreschen Tafeln für unsere Zwecke zu verwerten. Wir berechnen uns vor allem den Legendreschen Modul k, den komplementären Modul k' und die Hülfsgröfsen M, φ_a, φ_b von pag. 264. Darauf schlagen wir die Werte von $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tafel I von Legendre und die Werte von $F(k', \varphi_a)$, $F(k', \varphi_b)$ in der Tafel IX auf. Durch Multiplikation mit M ergeben sich hieraus die Werte von ω, ω', a und b. Durch diese letzteren, transcendenten Konstanten ist die Bewegung der Kreiselspitze und die Bewegung des Impuls-Endpunktes im Raume ebenso vollständig bestimmt, wie durch die ursprünglich vorliegenden Konstanten A, C, P, n, N, e. In der That brauchen wir uns bei der Berechnung der genannten Bahn- und Impulskurve um die Massenverteilung des Kreisels, um seine Anfangsbewegung und Anfangslage in keiner Weise mehr zu kümmern. Unsere ganze Aufgabe besteht darin, gewisse ϑ-Reihen auszurechnen, in deren Koeffizienten die Gröfsen ω und ω', in deren Argument überdies die Gröfsen a und b eingehen. Das Schema, nach dem wir zu rechnen haben,

ist so für alle Kreisel und für alle Kreiselbewegungen dasselbe. Die ganze Mannigfaltigkeit der Bewegungsformen ruht lediglich in der Verschiedenheit der in unser Schema einzusetzenden Werte unserer vier transcendenten Konstanten.

(Auf die Werte der ursprünglichen Konstanten brauchen wir nur dann zurückzugehen, wenn wir weiterhin etwa direkt die Werte der α, β, γ, δ beim symmetrischen Kreisel oder die Bahnkurve eines von der Kreiselspitze verschiedenen Punktes oder die Polhodie- und Herpolhodiekurve zu berechnen wünschen, in deren Gleichungen die Gröfse $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ vorkommt.)

Immerhin kann uns die Rücksicht auf gröfstmögliche Bequemlichkeit der Rechnung veranlassen, unser Verfahren unter Umständen etwas zu modifizieren. Wir bemerken, dafs die ϑ-Reihe von pag. 418

$$\vartheta(t) = 2q^{1/4}\sin s - 2q^{9/4}\sin 3s + 2q^{25/4}\sin 5s - \cdots \tag{1}$$

$$q = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega}}, \quad s = \frac{t\pi}{2\omega}, \tag{2}$$

um so schneller konvergiert, je kleiner q ist, je gröfser also das Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ ausfällt. Insbesondere wird sich die Rechnung in einem Periodenrechteck von gröfserer Höhe wie Breite ($\omega' > \omega$) bequemer gestalten, als in einem Periodenrechteck von gröfserer Breite wie Höhe ($\omega > \omega'$). Es ist daher wichtig, eine Umformung der ϑ-Funktion zu kennen, welche den letzteren Fall allemal auf den ersteren zu reduzieren gestattet.

Man wird auf die gedachte Umformung geführt, wenn man sich überzeugt, dafs die ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bei Vermehrung des Argumentes t um Periodenvielfache genau dieselben Faktoren annimmt wie das Produkt der ϑ-Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ und der Exponentialgröfse $e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}$. Da nun die ϑ-Funktion nach pag. 419 durch ihr Verhalten bei Vermehrung des Arguments um Periodenvielfache bis auf einen von t unabhängigen Faktor festgelegt ist, so schliefst man, dafs die ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bis auf eine multiplizierende Konstante dem genannten Produkte gleich sein mufs. Auf die Bestimmung dieser Konstanten, welche einige Weiterungen verursacht, gehen wir hier nicht ein. Die definitive Formel lautet:

$$\vartheta(t, \omega, \omega') = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\, e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}\, \vartheta(it, \omega', \omega). \tag{3}$$

Dabei ist die rechterhand stehende ϑ-Funktion ersichtlich durch die folgende Reihe zu berechnen:

$$(4) \quad \vartheta(it, \omega', \omega) = 2q'^{1/4} \sin s' - 2q'^{9/4} \sin 3s' + 2q'^{25/4} \sin 5s' - \cdots$$

$$(5) \quad q' = e^{-\frac{\omega\pi}{\omega'}}, \quad s' = \frac{it\pi}{2\omega'}.$$

Die Nützlichkeit der Formel (3) ist evident. Wenn wir eine ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ auszurechnen haben, in welcher $\omega > \omega'$ und daher q verhältnismäfsig grofs ist, so werden wir zunächst die Reihe $\vartheta(it, \omega', \omega)$ berechnen, welche wegen $q' < q$ besser konvergieren wird. Gleichung (3) gestattet uns dann, von dieser zu der ursprünglich gesuchten ϑ-Funktion mit leichter Mühe zurückzugehen.

Dafs die in Rede stehende Gleichung neben diesem praktischen auch ein allgemeines theoretisches Interesse (in der Lehre von der Transformation der ϑ-Funktionen) besitzt, möge hier nur kurz angedeutet werden.

Allerdings kann es vorkommen, dafs der geschilderte Vorteil, welcher in der Verkleinerung des q beruht, teilweise durch eine eventuelle Vergröfserung der trigonometrischen Funktionen in der ϑ-Reihe wettgemacht wird. In der That wird beim Übergang zu der Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ im Argumente der Sinus-Funktionen der Faktor i eingeführt, welcher zumal bei reellem t die Konvergenz erheblich verschlechtern kann. Es wird im einzelnen Falle darauf ankommen, die durch die Umformung (3) herbeigeführten Vorteile und Nachteile gegen einander abzuwägen.

Teils um die Rapidität zu verdeutlichen, mit der die ϑ-Reihen konvergieren, teils um die Durchrechnung eines Beispiels vorzubereiten, wollen wir uns jetzt ein Urteil darüber bilden, wie viel Glieder der ϑ-Reihe wir für unsere Zwecke zu berücksichtigen haben. Es hängt dies natürlich von der Genauigkeit ab, welche wir erreichen wollen.

In unserem Falle würde es keinen Zweck haben, die Genauigkeit soweit zu treiben, wie dies beispielsweise bei den mechanischen Problemen der Astronomie üblich ist. In der That kann es sich bei der Durchführung eines numerischen Beispiels nur um eines der beiden folgenden Ziele handeln: Die geometrische Auffassung des mechanischen Vorganges durch Zeichnung quantitativ richtiger Figuren zu beleben; und andererseits: Den theoretisch gefundenen Bewegungsvorgang mit dem Experimente zu vergleichen. In ersterer Hinsicht genügt offenbar eine mäfsige Genauigkeit, weil doch auch die Zeichnung nur mit verhältnismäfsig geringer Genauigkeit ausgeführt werden kann. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dafs die Verhältnisse des Experimentes durch Nebenumstände, namentlich durch Reibungsvorgänge, soweit entstellt werden, dafs eine erhebliche Übereinstimmung mit der abstrakten Theorie

überhaupt nicht zu erwarten ist. Es wird daher in unserem Falle etwa die Genauigkeit $\frac{1}{1000}$ genügen; *wir werden dementsprechend als erlaubte Fehlergrenze* $\frac{1}{1000}$ *des ganzen Wertes zulassen*, d. h. wir werden solche Gröfsen vernachlässigen, deren absoluter Betrag, dividiert durch den absoluten Betrag des ganzen Wertes, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Nach dieser Verabredung zeigen wir ein für allemal, dafs wir bei geeigneter Anordnung der Rechnung *immer nur die beiden ersten Glieder der ϑ-Reihe zu berücksichtigen brauchen.* Wir setzen dabei voraus: 1) dafs $\omega' \geqq \omega$ und 2) dafs das Argument der ϑ-Reihe dem den Nullpunkt umgebenden Periodenrechtecke angehört. Wäre nämlich $\omega' < \omega$, so könnten wir nach Gleichung (3) zu einer Reihe übergehen, in welcher die Werte der Perioden vertauscht sind; läge ferner der das Argument repräsentierende Punkt der t-Ebene in einem der anderen Periodenrechtecke, so könnten wir die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion heranziehen und, indem wir ein geeignetes Periodenvielfaches absondern, den Punkt auf das Ausgangsrechteck reduzieren.

Zum Beweise der vorstehenden Behauptung ersetzen wir in Gleichung (1) jedes Glied durch seinen absoluten Betrag. Für den Rest R der Reihe vom dritten Gliede inklusive ab bekommen wir so

$$|R| < 2q^{25/4}|\sin 5s| + 2q^{49/4}|\sin 7s| + \cdots \tag{6}$$

Wir zeigen zunächst allgemein, dafs stets

$$|\sin(a+ib)| \leqq e^{|b|}. \tag{7}$$

In der That haben wir

$$|\sin(a+ib)|^2 = \frac{e^{-2b} + e^{+2b} - 2\cos 2a}{4} \leqq \left(\frac{e^{-b} + e^{+b}}{2}\right)^2,$$

also

$$|\sin(a+ib)| \leqq \frac{e^{-b} + e^{+b}}{2} \leqq e^{|b|}.$$

Nun können wir uns nach Obigem auf solche Werte von t beschränken, deren imaginärer Teil absolut genommen nicht gröfser als ω' ist. Bezeichnen wir den imaginären Teil von s mit b, so wird nach Gleichung (2)

$$|b| \leqq \frac{\omega'\pi}{2\omega}$$

und mithin wegen (7)

$$|\sin 5s| \leqq e^{\frac{5}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \quad |\sin 7s| \leqq e^{\frac{7}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi} \cdots$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichungen können nach (2) bez. mit

$q^{-\frac{5}{2}}$, $q^{-\frac{7}{2}}$, ... bezeichnet werden. Die Ungleichung (6) geht daher über in

$$|R| < 2(q^{15/4} + q^{35/4} + \cdots).$$

Man überzeugt sich leicht, dafs die Glieder der rechten Seite stärker abnehmen, wie die Glieder der folgenden geometrischen Reihe:

$$2(q^{15/4} + q^{30/4} + q^{45/4} + \cdots) = \frac{2q^{15/4}}{1 - q^{15/4}}.$$

Infolgedessen wird

$$|R| < \frac{2q^{15/4}}{1 - q^{15/4}}. \tag{8}$$

Den absoluten Betrag dieses Restwertes R, bez. die soeben festgestellte obere Grenze desselben, haben wir mit dem absoluten Betrag des ganzen Wertes $\vartheta(t)$, bez. mit irgend einer unteren Grenze desselben, zu dividieren, um eine obere Grenze für den relativen Fehler zu erhalten. Dabei ist zu berücksichtigen, dafs die ϑ-Funktion verschwindet für ein verschwindendes t, so dafs wir bei sehr kleinem Werte von $|t|$ für unseren relativen Fehler scheinbar ein sehr ungünstiges Resultat erhalten würden. Deshalb wollen wir noch die ausdrückliche Beschränkung hinzufügen, dafs der Wert von $|t|$ nicht zu klein, sagen wir etwa nicht kleiner als $\frac{2\omega}{100}$ sein darf, wenn wir unser Verfahren anwenden wollen. Unter dieser Voraussetzung ist $|s| > \frac{\pi}{100}$; gleichzeitig gilt für alle Punkte im Innern unseres Periodenrechtecks:

$$|\sin s| > \sin\frac{\pi}{100} > 0{,}03. \tag{9}$$

Wir haben demnach jetzt unter der Voraussetzung $|t| < \frac{2\omega}{100}$ eine untere Grenze für den Wert von $|\vartheta(t)|$ festzustellen.

Zunächst schreiben wir mit Benutzung der oben eingeführten Abkürzung R:

$$|\vartheta(t)| = 2q^{1/4}|\sin s| \cdot \left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s} + \frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|.$$

Sodann benutzen wir den Satz, dafs der absolute Betrag einer Summe gröfser oder gleich der Differenz der absoluten Beträge der Summanden ist. Hiernach wird

$$|\vartheta(t)| \geqq 2q^{1/4}|\sin s| \left\{\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| - \left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|\right\}. \tag{10}$$

Die Klammer werden wir nun weiter verkleinern, indem wir den ersten Term kleiner und den zweiten Term gröfser machen. Setzen wir in

letzterem für $|R|$ den in (8) gefundenen zu grofsen, für $|\sin s|$ den in (9) angegebenen zu kleinen Wert, so ergiebt sich

$$\left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right| < \frac{q^{14/4}}{1-q^{15/4}}\,\frac{1}{0{,}03}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dafs wir uns auf den Fall $\omega' \geqq \omega$, d. h. $q \leqq e^{-\pi}$ beschränken wollten, so erhalten wir selbst in dem ungünstigsten Falle $\omega' = \omega$, d. h. $q = e^{-\pi}$, wenn wir ausrechnen:

$$\left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right| < 0{,}0006. \tag{11}$$

Andererseits wollen wir in dem ersten Terme der vorgenannten Klammer den Bruch $\sin 3s : \sin s$ ausdividieren. Ersetzen wir abermals den absoluten Betrag der so entstehenden Summe durch die Differenz der absoluten Beträge, so finden wir:

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| = |1 - 3q^2 + 4q^2\sin^2 s| > 1 - 3q^2 - 4q^2|\sin^2 s|.$$

Es ist aber nach (7) für alle Punkte unseres Periodenrechtecks:

$$|\sin^2 s| < e^{\frac{2\omega'\pi}{2\omega}}, \text{ d. h. } |\sin^2 s| < q^{-1}.$$

Mithin haben wir

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| > 1 - 4q - 3q^2$$

oder, wenn wir abermals zu dem ungünstigsten Falle $q = e^{-\pi}$ übergehen:

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| > 1 - 0{,}1724 - 0{,}0054, \text{ d. h. } > 0{,}8222. \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) ergiebt sich also für $|\vartheta(t)|$ die folgende untere Grenze

$$|\vartheta(t)| > 2q^{1/4}|\sin s| \cdot 0{,}8214,$$

oder mit Rücksicht auf (9)

$$|\vartheta(t)| > 2q^{1/4} \cdot 0{,}0246. \tag{13}$$

Mit Hülfe der Ungleichungen (8) und (13) läfst sich nun die fragliche obere Grenze für den relativen Fehler $|R| : |\vartheta(t)|$ sofort berechnen. Wir haben nämlich

$$\frac{|R|}{|\vartheta(t)|} < \frac{q^{14/4}}{1-q^{15/4}}\,\frac{1}{0{,}0246};$$

wertet man aber diesen Ausdruck für den ungünstigsten Fall $q = e^{-\pi}$ aus, so findet man

$$\frac{|R|}{|\vartheta(t)|} < \frac{1{,}68}{2{,}46}\,10^{-3} < \frac{1}{1000}.$$

Wir werden daher sagen können:

Bei der verlangten Genauigkeit $\frac{1}{1000}$ *genügt es allemal, die beiden ersten Glieder der* ϑ*-Reihe beizubehalten, es sei denn, daſs das Argument der* ϑ*-Reihe von Null sehr wenig verschieden ist,* $\left(|t| < \frac{2\omega}{100}\right)$.

Übrigens ist die zuletzt genannte Ausnahme nur durch den Gang unserer Rechnung, nicht durch die Natur der Sache bedingt. Durch besondere Überlegungen, welche wir hier indessen nicht ausführen wollen, lieſse sie sich beseitigen, so daſs unser Satz allgemeine Gültigkeit erhält.

Dabei ist noch zu bemerken, daſs wir bei unserer Abschätzung recht grobe Vernachlässigungen vorgenommen haben, daſs sich also in Wirklichkeit die Sache noch erheblich günstiger stellen wird. Dieser Umstand möge es rechtfertigen, wenn wir im Folgenden auch die Reihe für den Differentialquotienten $\vartheta'(t)$, welche nur wenig schlechter konvergiert, wie die ϑ-Reihe selbst, ohne Weiteres mit dem zweiten Gliede abbrechen werden. Übrigens wäre eine eigene Fehlerabschätzung auch bei dieser Reihe nicht schwer und fast genau so durchzuführen wie die obige. Ferner werden wir uns aus eben jenem Grunde für berechtigt halten, wenn mehrere ϑ-Reihen zu Quotienten oder Produkten zusammentreten, jede einzelne Reihe mit dem zweiten Gliede abzubrechen, obwohl bei einer Kombination von n ϑ-Reihen als obere Grenze des Fehlers zunächst das n-fache der früher festgestellten Fehlergrenze angenommen werden müſste. —

Wir gehen jetzt zur wirklichen Durchführung eines numerischen Beispiels über.

Dabei legen wir etwa den pag. 299 betrachteten Kreisel zu Grunde, welcher aus einem Schwungrade von quadratischem Querschnitt bestand. Die Seitenlänge des Querschnittquadrates betrug 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm, der Unterstützungspunkt lag $\frac{5}{2}$ cm unter dem Schwerpunkte. Für die Trägheitsmomente und für das Drehmoment der Schwerkraft fanden wir l. c., unter ϱ die Dichtigkeit des Materiales verstanden, die folgenden, im absoluten Maſssystem gemessenen Werte:

$$C = 1000\,\varrho\pi, \quad A = 750\,\varrho\pi, \quad P = 100\,\varrho\pi g.$$

Über die Anfangslage des Kreisels setzen wir etwa fest, daſs zu Beginn der Bewegung der Winkel ϑ_0 zwischen Figurenaxe und Vertikale gleich 60^0 sei. Wir haben dann

$$e = \cos\vartheta_0 = \frac{1}{2}.$$

Sodann legen wir den anfänglichen Bewegungszustand durch die Impulskomponenten N und n fest. Wir wollen N so wählen, dafs wir es mit einem starken Kreisel zu thun haben. Hierzu ist nach pag. 249 in dem vorliegenden Falle $P > 0$ erforderlich

$$N^2 > 2AP(1 + e)$$

d. h. bei unserem Kreisel, da ungefähr $g = 100\,\pi^2$ ist,

$$N^2 > 3 \cdot 750 \cdot (100)^2 \varrho^2 \pi^4.$$

Dieser Ungleichung genügen wir, wenn wir beispielsweise annehmen

$$N = 4800\,\varrho\pi^2.$$

Der zugehörige Wert der Rotationskomponente r wird dann

$$r = \frac{N}{C} = 4{,}8\,\pi,$$

d. h. (vgl. pag. 11) 2, 4 Umdrehungen in der Sekunde. Ferner wollen wir über den Wert der Impulskomponente n so verfügen, dafs n etwas kleiner wie N und positiv wird, in welchem Falle wir die auf der Ungleichung $0 < n < N$ beruhenden Angaben über die Nullstellen der α, β, γ, δ (vgl. pag. 402) und ihre hieran anschliefsende Darstellung durch ϑ-Funktionen genau in der früheren Form in Anwendung bringen können. Wir wählen etwa

$$n = 4200\,\varrho\pi^2.$$

Demnächst berechnen wir die Werte von e' und e'' aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, welche in unserem Falle lautet:

$$-\left(u + \tfrac{1}{2}\right)(4200^2 + 4800^2)\,\varrho^2\pi^4 + 2\left(1 + \tfrac{u}{2}\right)4200 \cdot 4800\,\varrho^2\pi^4$$

$$-\tfrac{3}{2}(1 - u^2)\,750 \cdot 100\,\varrho^2\pi^2 g = 0.$$

Benutzen wir wieder für g den Wert $100\,\pi^2$, so folgt

$$125\,u^2 - 228\,u + 97 = 0$$

oder

$$u^2 - 1{,}824\,u + 0{,}776 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 0,6759 und 1,1481. Mithin haben wir in der pag. 261 festgesetzten Reihenfolge:

(14) $$e = 0{,}5000, \quad e' = 0{,}6759, \quad e'' = 1{,}1481.$$

Jetzt berechnen wir den Legendreschen Modul

$$k = \sqrt{\frac{e' - e}{e'' - e}} = 0{,}5210$$

und gehen von diesem zu dem Winkel

$$\Theta = \arcsin k = 31{,}40^0$$

über. Der zu dem komplementären Modul k' in entsprechender Weise hinzugehörende Winkel Θ' ist daher

$$\Theta' = 90^0 - \Theta = 58{,}60^0.$$

Die Hülfsgröfsen M, φ_a, φ_b von pag. 264 werden gleichzeitig:

$$\log M = 0{,}1851 - 1, \quad \varphi_a = 71{,}10^0, \quad \varphi_b = 70{,}60^0.$$

Darauf sehen wir in der Legendreschen Tafel I die Werte von $\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ nach. Wir finden auf pag. 228 und pag. 233 dieser Tafel

$$\log F\left(k, \tfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}2298, \quad \log F\left(k', \tfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}3263.$$

Mithin haben wir

	$\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	$= 0{,}2298$	$\log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$	$= 0{,}3263$
	$\log M$	$= 0{,}1851 - 1$	$\log M$	$= 0{,}1851 - 1$
	$\log \omega$	$= 0{,}4149 - 1$	$\log \omega'$	$= 0{,}5114 - 1$
(15)	ω	$= 0{,}2600$	ω'	$= 0{,}3246.$

In unserem Beispiel liegt also der für die Berechnung der ϑ-Funktionen günstige Fall vor, dafs die Höhe des Periodenrechtecks gröfser ist als die Breite. Wir werden also keinen Grund haben, die in Gleichung (3) angegebene Umformung der ϑ-Reihen vorzunehmen.

Aus $\log \omega$ und $\log \omega'$ bilden wir nach Gleichung (2) die Gröfse q. Es ergiebt sich

$$\log q = 0{,}2959 - 2, \quad q = 0{,}0198.$$

Ferner haben wir die Gröfsen a und b aus der Legendreschen Tafel IX zu bestimmen, wobei eine kleine Interpolation nötig wird. Es ergiebt sich nach pag. 339 dieser Tafel:

$$F(k', \varphi_a) = 1{,}5129, \quad F(k', \varphi_b) = 1{,}4988.$$

Mithin wird

	$\log F(k', \varphi_a)$	$= 0{,}1798$	$\log F(k', \varphi_b)$	$= 0{,}1757$
	$\log M$	$= 0{,}1851 - 1$	$\log M$	$= 0{,}1851 - 1$
	$\log a$	$= 0{,}3649 - 1$	$\log b$	$= 0{,}3608 - 1$
(16)	a	$= 0{,}2317$	b	$= 0{,}2295$

Wir stellen sogleich einige bei der Berechnung unserer ϑ-Reihen häufig vorkommende Gröfsen in einer kleinen Tabelle zusammen:

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = 4{,}0563, \quad e^{-\frac{a\pi}{2\omega}} = 0{,}2465, \quad e^{\frac{3a\pi}{2\omega}} = 66{,}74, \quad e^{-\frac{3a\pi}{2\omega}} = 0{,}02,$$

$$-i \sin \frac{ia\pi}{2\omega} = 1{,}9049, \quad \cos \frac{ia\pi}{2\omega} = 2{,}1514,$$

$$-iq^2 \sin \frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130, \quad q^2 \cos \frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130;$$

$$e^{\frac{b\pi}{2\omega}} = 4{,}0031, \quad e^{-\frac{b\pi}{2\omega}} = 0{,}2498, \quad e^{\frac{3b\pi}{2\omega}} = 64{,}15, \quad e^{-\frac{3b\pi}{2\omega}} = 0{,}02,$$

$$-i \sin \frac{ib\pi}{2\omega} = 1{,}8766, \quad \cos \frac{ib\pi}{2\omega} = 2{,}1265,$$

$$-iq^2 \sin \frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125, \quad q^2 \cos \frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125;$$

$$e^{\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 1{,}7531, \quad e^{-\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}5704, \quad e^{\frac{3(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 5{,}39, \quad e^{-\frac{3(\omega-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}19,$$

$$-i \sin \frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}5913, \quad \cos \frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 1{,}1617,$$

$$-iq^2 \sin \frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011, \quad q^2 \cos \frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011;$$

$$e^{\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 1{,}7766, \quad e^{-\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}5629, \quad e^{\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 5{,}60, \quad e^{-\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}18,$$

$$-i \sin \frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}6068, \quad \cos \frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 1{,}1697,$$

$$-iq^2 \sin \frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011, \quad q^2 \cos \frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011.$$

Nunmehr können wir zur Berechnung der Bahnkurve übergehen, welche die Kreiselspitze auf der Einheitskugel beschreibt. Da e und e' beide positiv sind, die Bahnkurve also ganz auf der nördlichen Halbkugel verläuft, so werden wir die Kurve so zeichnen, wie sie bei stereographischer Projektion vom *Südpole* erscheint. Dementsprechend wählen wir als analytische Darstellung der Bahnkurve die Gleichung (4′) von pag. 433

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega-ib+ia)}, \quad L = l+l'-\dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Alsdann bedeutet, wie wir wissen, λ direkt diejenige komplexe Variable, welche im gewöhnlichen Gaufsischen Sinne dem Bildpunkte der Kreiselspitze in der Äquatorebene der Einheitskugel bei stereographischer Projektion vom Südpole entspricht.

Hier sind zunächst die Konstanten K und L zu finden.

Wir haben, wenn wir die ϑ-Reihen mit dem zweiten Gliede abbrechen und die in der vorigen Tabelle angegebenen Werte benutzen:

$$K = \frac{-i \sin \frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2 \sin \frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{\cos \frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2 \cos \frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}} e^{\frac{\pi}{2\omega}(a-b)}$$

$$= \frac{0{,}5913 - 0{,}0011}{1{,}1697 + 0{,}0011} \frac{4{,}0563}{4{,}0031} = 0{,}511.$$

Sodann berechnen wir zur Bestimmung von L die Gröfsen l und l' nach den Gleichungen (18) von pag. 428:

$$l = i \frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}, \qquad l' = i \frac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)};$$

hier wollen wir l' noch ein wenig umformen, indem wir schreiben:

$$l = i\left(\frac{\vartheta'(-i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(-i\omega' - \omega + ib)} - \frac{i\pi}{\omega}\right) = -i \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} + \frac{\pi}{\omega};$$

also wird

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = -i \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)}.$$

Da wir auch die Reihe für ϑ' mit dem zweiten Gliede abbrechen wollten, so ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Tabelle:

$$l = \frac{\pi}{2\omega} \frac{\cos \frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} - 3q^2 \cos \frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{-i \sin \frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2 \sin \frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\omega} \frac{1{,}1617 - 0{,}0033}{0{,}5913 - 0{,}0011} = \frac{\pi}{2\omega} 1{,}963,$$

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} \frac{-i \sin \frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} - 3iq^2 \sin \frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}}{\cos \frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2 \cos \frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2\omega} \frac{0{,}6068 + 0{,}0033}{1{,}1697 + 0{,}0011} = -\frac{\pi}{2\omega} 0{,}521.$$

Hieraus folgt

$$L = \frac{\pi}{2\omega}(1{,}963 - 0{,}521) = \frac{\pi}{2\omega} 1{,}442.$$

Diese Werte der Konstanten setzen wir in Gleichung (11) ein, brechen abermals die ϑ-Reihen mit dem zweiten Gliede ab und lösen die trigonometrischen Funktionen in einen reellen und imaginären Teil auf. Setzen wir noch zur Abkürzung $\frac{t\pi}{2\omega} = s$ und ziehen unsere Tabelle von pag. 450 zu Rate, so ergiebt sich:

$$(18)\quad \lambda = 0{,}511\, e^{1{,}442\, is} \frac{(2{,}1265 \cos s + 0{,}0125 \cos 3s) - i(1{,}8766 \sin s + 0{,}0125 \sin 3s)}{(2{,}1514 \sin s - 0{,}0130 \sin 3s) + i(1{,}9049 \cos s - 0{,}0130 \cos 3s)}.$$

Wir wollen auf dem einzelnen Halbbogen zwischen den Parallelkreisen e und e' zehn Punkte berechnen, welche bez. den äquidistanten

Werten $t = 0, \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{9}, \cdots \frac{9\omega}{9}$ zugehören mögen. Die entsprechenden Werte von s sind $s = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \ldots \frac{\pi}{2}$ oder $s = 0^0, 10^0, 20^0, \ldots 90^0$. Die zugehörigen Werte von λ mögen mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_9$ bezeichnet werden. Man berechnet praktischer Weise zuerst den absoluten Betrag dieser Gröfsen; das Verhältnis des reellen und imaginären Teiles ergiebt sich dann auf trigonometrischem Wege. Das Resultat der verhältnismäfsig bequemen Rechnung zeigt die folgende Tabelle:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \quad\quad - 0{,}577\, i \\
\lambda_1 &= 0{,}164 - 0{,}549\, i \\
\lambda_2 &= 0{,}304 - 0{,}470\, i \\
\lambda_3 &= 0{,}406 - 0{,}356\, i \\
\lambda_4 &= 0{,}464 - 0{,}227\, i \\
\lambda_5 &= 0{,}480 - 0{,}108\, i \\
\lambda_6 &= 0{,}471 + 0{,}017\, i \\
\lambda_7 &= 0{,}439 + 0{,}118\, i \\
\lambda_8 &= 0{,}393 + 0{,}205\, i \\
\lambda_9 &= 0{,}338 + 0{,}281\, i.
\end{aligned}$$

Der letzte Wert liefert eine erwünschte Kontrolle unserer Rechnung; es mufs nämlich sein absoluter Betrag gleich dem Radius des in die Äquatorebene stereographisch projicierten Parallelkreises e', d. h. gleich $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \arccos e'\right)$ sein. In der That wird

$$\log |\lambda_9| = 0{,}6434 - 1 = \log \operatorname{tang} (23^0\, 45')$$

und in Übereinstimmung mit Gleichung (14) bis auf einen Fehler, der weniger als $\frac{1}{1000}$ des ganzen Wertes beträgt,

$$\cos (47^0\, 30') = 0{,}6756 = e'.$$

Die vorstehenden Werte von λ geben uns für die Zeichnung der Bahnkurve in stereographischer Projektion die rechtwinkligen Koordinaten von zehn ihrer Punkte, welche in der folgenden Figur durch die Zahlen 0, 1, 2, . . . markiert sind. Man hat dabei nur zu beachten, dafs die positive reelle und imaginäre Axe der λ-Ebene durch Projektion aus denjenigen beiden Meridianen der Einheitskugel entstehen, welche bez. durch die positive x- und y-Axe hindurchgehen. Da die erstere in die letztere von der Vertikalen gesehen durch eine Drehung *im* Sinne des Uhrzeigers übergeführt wird (vgl. die in Figur 4 auf pag. 18 enthaltene Festsetzung), so gilt das Entsprechende für die

positive reelle und imaginäre Axe der λ-Ebene. Zählen wir die reelle Axe positiv nach rechts, so müssen wir die imaginäre Axe nach *unten*, also umgekehrt wie es in der Gaufsischen Ebene zu geschehen pflegt, positiv rechnen. Hierauf beziehen sich die Pfeile in der Figur.

Die Bahnkurve setzt, wie die Figur zeigt, auf der negativ imaginären Axe ein und umläuft die Vertikale im Sinne des Uhrzeigers. Die Verschiedenheit in den Längen der Teilbögen 0 1, 1 2, 2 3, . . ., welche sämtlich in demselben Zeitintervalle $\frac{\omega}{9}$ durchlaufen werden, giebt uns gleichzeitig ein Bild von der wechselnden Geschwindigkeit der Kreiselspitze. Der weitere Verlauf der Bahnkurve jenseits des Punktes 9 ist den Symmetrieverhältnissen entsprechend vervollständigt worden.

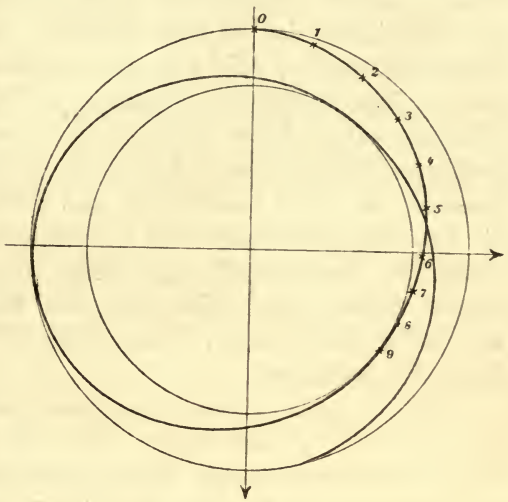


Fig. 65.

Insbesondere bemerken wir noch, dafs die Spannweite des einzelnen Halbbogens unserer Bahnkurve, die Gröfse ψ_ω, von deren Berechnung bereits pag. 269 gesprochen wurde, allgemein durch den Wert des Exponenten Lt für $t = \omega$ gegeben ist. Unsere Bahnkurvengleichung liefert nun für ψ_ω den Wert

$$\psi_\omega = L\omega = (l + l')\omega - \pi.$$

In unserem Beispiele wird also speziell

$$\psi_\omega = 1{,}442\,\frac{\pi}{2} = 129^0\,46'\,48''.$$

Auch die Berechnung der übrigen Elemente der Kreiselbewegung, z. B. die Berechnung der Horizontalprojektionen unserer beiden Impulskurven, bietet nun gar keine Schwierigkeit mehr. Die Ähnlichkeit in der analytischen Darstellung dieser Kurven mit der Darstellung unserer Bahnkurve wird dabei eine qualitative Ähnlichkeit in dem Verlauf dieser Kurven mit der eben angezeichneten bewirken.

Zum Schlusse möchten wir nachdrücklichst auf die merkwürdige Einfachheit und den ganz elementaren Charakter der somit gewonnenen numerischen Berechnungsweise der Kreiselbahnen hinweisen. Der analytische Apparat der elliptischen Funktionen versieht uns nicht nur

mit der theoretisch genauen Bahnkurvengleichung (17), sondern auch, was nicht minder bemerkenswert ist, mit einer höchst elementaren, praktisch ausreichenden Näherungsformel (in unserem Beispiele Gleichung (18)), welche weit vollständiger und bequemer ist, als die am Schlusse des vierten Kapitels entwickelten angenäherten Methoden. Natürlich ist die Zulässigkeit der in Rede stehenden Näherungsformel an die Bedingung gebunden, dafs man das Argument der ϑ-Funktion vorher auf das den Nullpunkt umgebende Periodenparallelogramm reduziert und dafs man, falls es nötig ist, ein Periodenrechteck von gröfserer Breite als Höhe in ein solches von gröfserer Höhe als Breite transformiert hat. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Reduktion (durch die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen) bez. diese Transformation (durch die Transformationsgleichung (3)) bei den ϑ-Funktionen ausgeführt werden kann, bildet einen der Vorzüge, welche die Rechnung mit den ϑ-Funktionen vor der direkten Auswertung der elliptischen Integrale auszeichnet.

Dafs in unserer Näherungsformel die transcendenten Konstanten ω, ω', a und b vorkommen, kann den elementaren Charakter der Näherungsmethode ebenso wenig beeinträchtigen, wie das Vorkommen der Exponentialgröfsen oder der trigonometrischen Funktionen, da jene Gröfsen ebenso wie diese ohne Umstände aus den betreffenden Tafeln entnommen werden können. Wenn man also eine elementare analytische Behandlung der Kreiselbewegung wünscht, so ist diese gerade auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen zu suchen und durch Abbrechen der ϑ-Reihen zu realisieren.

Überhaupt können wir sagen, indem wir die Ergebnisse dieses Paragraphen etwas verallgemeinernd aussprechen: *Eine ϑ-Reihe bedeutet praktisch nichts anderes als eine Summe von zwei trigonometrischen Termen. Jede Formel mit elliptischen Funktionen läfst sich für die Zwecke des numerischen Rechnens durch eine solche mit wenigen trigonometrischen Funktionen ersetzen.*

§ 7. Darstellung der Bewegungen des kräftefreien Kreisels durch elliptische Funktionen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels, welche früher (vgl. pag. 149 ff.) nur bis zur Aufstellung der elliptischen Integrale geführt worden ist, nach dem Vorbilde der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels eingehender untersuchen und durch die elliptischen Funktionen explicite darstellen.

Wir werden uns hier auf die analytische Seite des Problems beschränken dürfen, da wir die geometrischen Eigenschaften dieser Be-

wegung schon früher (Kap. III § 2) im Anschlusse an Poinsot ausgiebig diskutiert haben. In erster Linie wünschen wir zu zeigen, wie auch hier unsere Parameter α, β, γ, δ die einfachste und vollständigste Beschreibung des Bewegungsvorganges vermitteln.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, belegen wir die ganze Klasse der hier zu betrachtenden Bewegungen mit dem schon früher benutzten Namen der *Poinsot-Bewegungen.*

Wir setzen zunächst die früher (pag. 148—150) gewonnenen Formeln her, welche für das Folgende hauptsächlich in Betracht kommen. Es sind dieses zunächst die beiden algebraischen Integrale der kräftefreien Kreiselbewegung, die Sätze von der Konstanz der lebendigen Kraft und der Impulslänge:

$$(1) \qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \end{cases}$$

Bezeichnet ferner u das Quadrat der Länge des Drehungsvektors

$$u = p^2 + q^2 + r^2,$$

so berechneten sich p^2, q^2 und r^2 als lineare Funktionen von u, wobei insbesondere

$$(2) \qquad r^2 = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}$$

war; die Zeit t aber wurde das folgende elliptische Integral

$$(3) \qquad t = \frac{1}{m}\int \frac{du}{pqr},$$

in welchem die Konstante m, (welche pag. 149 mit c bezeichnet wurde), den Wert

$$(4) \quad m = 2\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) = -2\,\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC}$$

hat. Die im Raume feste Impulsaxe wählten wir bequemer Weise zur dritten Koordinatenaxe des im Raume festen Systems x, y, z. Dann drückten sich die Richtungskosinusse c, c', c'' dieser Axe gegen die im Körper festen Hauptträgheitsaxen X, Y, Z einfach durch die folgenden Gleichungen aus:

$$(5) \qquad c = \frac{Ap}{G}, \quad c' = \frac{Bq}{G}, \quad c'' = \frac{Cr}{G}.$$

Um die Behandlung des kräftefreien Kreisels möglichst enge an die des schweren Kreisels anzuschliefsen, wollen wir jetzt statt der Integrationsvariabeln u eine neue v einführen, welche gleich $\cos\vartheta = c''$ ist. Wir haben dann nach (5)

$$(6) \qquad v = \frac{Cr}{G};$$

die Beziehung zwischen u und v lautet daher nach (2)

$$\frac{G^2v^2}{C^2} = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}. \tag{7}$$

Um t durch v auszudrücken, berechnen wir aus (6) und (7)

$$\frac{du}{r} = \frac{G(C-A)(C-B)}{ABC}\,dv. \tag{8}$$

Ferner folgt aus (1) durch Elimination von q^2 oder p^2:

$$A(B-A)p^2 = (2hC - G^2v^2)\frac{B}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

$$B(A-B)q^2 = (2hC - G^2v^2)\frac{A}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

mithin

$$\begin{cases} p^2 = \dfrac{G^2(B-C)}{AC(B-A)}\left(\dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2} - v^2\right), \\ q^2 = \dfrac{G^2(A-C)}{BC(A-B)}\left(\dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2} - v^2\right). \end{cases} \tag{9}$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$\begin{cases} e^2 = \dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2}, \quad e'^2 = \dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2}, \\ V = \dfrac{(A-C)(B-C)}{AB}\dfrac{G^2}{C^2}(e^2-v^2)(v^2-e'^2), \end{cases} \tag{9'}$$

so können wir schreiben

$$pq = \frac{G}{A-B}\sqrt{V}. \tag{10}$$

Unser Integral (3) lautet daher, in die neue Variable v transformiert, mit Rücksicht auf (8), (10) und den in (4) angegebenen Wert von m:

$$t = \int \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Unter der Quadratwurzel steht jetzt das Polynom vierten Grades V. Seine Nullstellen $v = \pm e$ und $v = \pm e'$ geben die sämtlichen Verzweigungspunkte der *zweiblättrigen Riemannschen Fläche* $(v, \sqrt{V})$ an, auf welcher wir im Folgenden zu operieren haben. Je zwei übereinanderliegende Punkte der Riemannschen Fläche sind durch gleiche Werte von v und entgegengesetzt gleiche von $\sqrt{V}$ charakterisiert.

Um die gegenseitige Lage der Verzweigungspunkte beurteilen zu können, berechnen wir aus (9) zunächst

$$e'^2 - e^2 = \frac{(2hC-G^2)(A-B)C}{(A-C)(B-C)G^2}; \tag{10'}$$

ferner setzen wir bezüglich der Hauptträgheitsmomente A, B, C voraus:

$$A > B > C.$$

Dann werden nach (9′) und (10′) die Vorzeichen von e^2, e'^2 und $e'^2 - e^2$ bez. gleich den Vorzeichen der Gröfsen

$$2hA - G^2, \quad 2hB - G^2, \quad 2hC - G^2.$$

Die letzteren ergeben sich aber, wenn wir aus den Gleichungen (1) der Reihe nach p^2, q^2 und r^2 eliminieren. Dann entsteht nämlich

$$(11) \quad \begin{cases} 2hA - G^2 = B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2, \\ 2hB - G^2 = A(B-A)p^2 + C(B-C)r^2, \\ 2hC - G^2 = A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2. \end{cases}$$

Hier ist die rechte Seite der ersten Gleichung, da p^2, q^2, r^2 bei der thatsächlich stattfindenden Kreiselbewegung reelle positive Gröfsen sind, wegen der für die Hauptträgheitsmomente festgesetzten Ungleichung jedenfalls positiv, die rechte Seite der letzten Gleichung sicherlich negativ. Dagegen kann die rechte Seite der zweiten Gleichung (wegen $B - A < 0$ und $B - C > 0$) sowohl positiv wie negativ sein. Wir teilen daher die Bewegungen des kräftefreien Kreisels in zwei verschiedene Klassen $2hB - G^2 > 0$ und $2hB - G^2 < 0$ ein; den Grenzfällen $2hB - G^2 = 0$, welche beiden Klassen gemeinsam sind, gehört unter Anderem die instabile Rotation um die mittlere Hauptträgheitsaxe mit $p = 0$, $r = 0$ zu. Wir wollen aber im Folgenden vorerst nur solche Bewegungen betrachten, welche zu der Klasse $2hB - G^2 > 0$ gehören. Dann haben wir

$$2hA - G^2 > 0, \quad 2hB - G^2 > 0, \quad 2hC - G^2 < 0,$$

und dementsprechend

$$e^2 > 0, \quad e'^2 > 0, \quad e^2 > e'^2.$$

Die vier Verzweigungspunkte $\pm e$, $\pm e'$ *liegen also sämtlich auf der reellen Axe und folgen auf einander in der Reihenfolge:*

$$-\infty < -e < -e' < +e' < e < +\infty.$$

Die folgende Figur stellt einen durch die reelle Axe gelegten Ausschnitt aus der Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor. Auf der so ent-

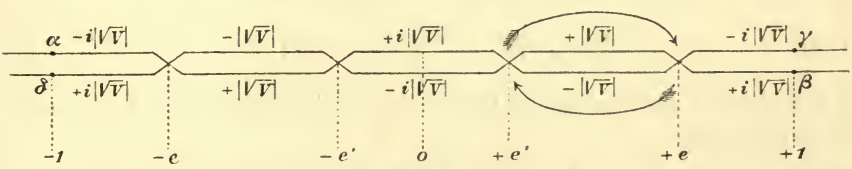


Fig. 66.

stehenden Doppelgeraden unterscheiden wir die vier Segmente $(-e, -e')$, $(-e', +e')$, $(+e', +e)$ und das im Unendlichen geschlossene Segment $(+e, \infty, -e)$. Nach Gleichung (9′) ist V in dem ersten und

dritten dieser Segmente positiv, in dem zweiten und vierten negativ. Damit also t reell ausfällt, ist die Integrationsvariable v auf eins der erstgenannten Segmente, sagen wir auf das Segment $(+e', +e)$ zu beschränken. Um dieses haben wir sie, damit dt überdies positiv wird, fortgesetzt in demselben Sinne (vgl. den Pfeil der Figur) herumzuführen. Die untere Grenze des Integrals legen wir in den Verzweigungspunkt $v = e$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit 2ω den Zuwachs, den t bei einem vollen Umlauf um unser Integrationssegment ee' erfährt, setzen also

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{dv}{\sqrt{V}}. \tag{12}$$

Derselbe Zuwachs 2ω entsteht dann auch bei einem (in geeignetem Sinne gerechneten) Umlauf um das Segment $(-e, -e')$. Andrerseits bezeichnen wir (aus später ersichtlichen Gründen) den Zuwachs, den t bei einem Umlauf um eins der beiden anderen Segmente $(-e', e')$ bez. $(e, \infty, -e)$ annimmt, mit $4i\omega'$, so dafs also beispielsweise wird

$$2i\omega' = \int_{+e}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}. \tag{12'}$$

Die Gröfsen 2ω und $4i\omega'$ heifsen *die Perioden unseres überall endlichen Integrals* t.

Vor allem müssen wir uns jetzt mit unseren Parametern α, β, γ, δ beschäftigen. Wir leiten zunächst Integralausdrücke für die Logarithmen dieser Gröfsen aus den pag. 43 gegebenen Gleichungen (4) ab.

Beispielsweise haben wir nach der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2} \frac{\beta}{\alpha}. \tag{13}$$

Um hier den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ durch bekannte Gröfsen auszudrücken, vergleichen wir die dritten Horizontalreihen in den Schematen (3) und (9) von pag. 17 und 21 miteinander. Wir finden dann

$$\alpha\gamma = \frac{ic' - c}{2}, \quad \beta\delta = \frac{ic' + c}{2}, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = c''. \tag{14}$$

Verbindet man die letzte dieser Gleichungen mit der Identität $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so ergiebt sich

$$\alpha\delta = \frac{c'' + 1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{c'' - 1}{2}. \tag{14'}$$

Aus (14) und (14') folgt nun durch Division

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{ic' + c}{c'' + 1} = \frac{c' - 1}{ic' - c}.$$

Hier tragen wir noch die in (5) angegebenen Werte von c, c', c'' ein und erhalten:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{Ap + iBq}{Cr + G} = \frac{G - Cr}{Ap - iBq}. \tag{15}$$

Mithin geht Gleichung (13) über in

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2} \frac{Ap + iBq}{Cr + G}. \tag{16}$$

Auf der rechten Seite wollen wir p, q, r durch v ausdrücken. Bringen wir auf gleichen Nenner, so ergiebt sich rechts

$$\frac{i(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + iGr + (A - B)pq}{2(Cr + G)}.$$

Im Zähler ist der erste Term nach dem Satze der lebendigen Kraft konstant $= 2ih$; der letzte Term wird nach Gleichung (10) gleich $G\sqrt{V}$. Mithin nimmt (16), wenn wir für r den Wert aus Gleichung (6) substituieren, die Form an:

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)}. \tag{16'}$$

Ersetzen wir endlich die Differentiation nach t durch eine solche nach v, so ergiebt sich

$$\frac{d \log \alpha}{dv} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{16''}$$

Die Integraldarstellung von $\log \alpha$ *lautet daher,* wenn wir die unwesentliche Integrationskonstante weglassen:

$$\log \alpha = \int \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \frac{dv}{\sqrt{V}}; \tag{17}$$

in entsprechender Weise findet man

$$\begin{cases} \log \beta = \int \dfrac{-\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v - 1)} \dfrac{dv}{\sqrt{V}}, \\ \log \gamma = \int \dfrac{\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v - 1)} \dfrac{dv}{\sqrt{V}}, \\ \log \delta = \int \dfrac{-\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \dfrac{dv}{\sqrt{V}}. \end{cases} \tag{17}$$

Wir haben nun das Verhalten dieser Integrale auf unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$, insbesondere die Lage der Unendlichkeitsstellen zu untersuchen.

Betrachten wir z. B. $\log \alpha$. Von den Unendlichkeitsstellen des Integranden, d. i. den Stellen $v = \pm e$, $\pm e'$; $v = -1$, $v = \infty$ kommen die Verzweigungspunkte $\pm e$ und $\pm e'$ als Unendlichkeitsstellen des Integrals nicht in Betracht, weil hier die Ordnung des Unendlichwerdens kleiner als 1 ist. Die beiden anderen Stellen $v = -1$ und $v = \infty$ repräsentieren auf der Riemannschen Fläche je zwei übereinanderliegende Punkte. Wir werden nun sehen, dafs $\log \alpha$ in den *beiden* übereinanderliegenden Punkten $v = \infty$, aber nur in einem der Punkte $v = -1$ logarithmisch unendlich wird.

Bei der Untersuchung der Stelle $v = \infty$ können wir im Zähler der Integraldarstellung (17) die beiden ersten Terme gegen den dritten $\sqrt{V}$ fortlassen, weil jene von niedrigerer Ordnung unendlich werden wie dieser. Streichen wir auch im Nenner 1 gegen v, so behalten wir einfach übrig

$$\log \alpha = \int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2} \log v. \tag{18}$$

Diese Rechnung gilt gleichmäfsig für beide Punkte $v = \infty$ der Riemannschen Fläche und für alle vier Parameter α, β, γ, δ. Wir sehen also:

Für $v = \infty$ werden die Logarithmen aller vier Parameter in beiden Blättern der Fläche logarithmisch unendlich.

Wir fügen noch, indem wir uns auf die Erklärungen von pag. 404 und auf die Darstellung von $\log \alpha$ in Gleichung (18) stützen, hinzu:

Bei einem positiven, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um eine der beiden Stellen $v = \infty$ erfahren die Logarithmen unserer vier Parameter den Zuwachs $-\pi i$.

Indem wir zur Stelle $v = -1$ übergehen, bemerken wir zunächst, dafs, wenn $v + 1 = 0$, d. h. $Cr + G = 0$ ist, nach den beiden letzten Gliedern von Gleichung (15) gleichzeitig auch entweder $Ap + iBq$ oder $Ap - iBq$ verschwindet. Das eine findet im einen, das andere im anderen Blatte der Riemannschen Fläche statt.

In demjenigen Blatte nun, wo $Ap + iBq$ verschwindet, bleibt nach Gleichung (16) $\frac{d \log \alpha}{dt}$ und also auch $\log \alpha$ endlich, weil hier das Nullwerden des Nenners durch das des Zählers aufgehoben wird. Wir merken insbesondere noch den Wert von $\sqrt{V}$ an, der sich aus dem soeben erwiesenen Verschwinden des Zählers in Gleichung (17) ergiebt:

$$\sqrt{V} = -\left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v\right).$$

In dem anderen Blatte dagegen, wo $Ap - iBq$ verschwindet, findet ein Unendlichwerden von $\log \alpha$ statt. Die Art des Unendlich-

werdens ergiebt sich folgendermafsen. Da die Werte von $\sqrt{V}$ in übereinanderliegenden Punkten der Riemannschen Fläche sich nur im Vorzeichen unterscheiden, so wird für die in Rede stehende Stelle der Wert von $\sqrt{V}$ dem soeben angegebenen entgegengesetzt gleich; wir haben jetzt:

$$\sqrt{V} = + \left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v \right).$$

Der Zähler in Gleichung (17) wird also einfach gleich $2\sqrt{V}$, so dafs sich ergiebt:

$$\log \alpha = \int \frac{dv}{v+1} = \log (v+1). \tag{18'}$$

Untersucht man in entsprechender Weise das Verhalten von $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ an den Stellen $v = \pm 1$, so kommt man zu dem folgenden zusammenfassenden Resultat:

Die Logarithmen unserer Parameter α, β, γ, δ werden je in einem der vier zu den Werten $v = \pm 1$ gehörigen Punkten der Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ logarithmisch unendlich. Der Zuwachs, den diese Logarithmen bei einem positiven einmaligen Umlauf um die betreffende Unendlichkeitsstelle erfahren, ist, wie aus Gleichung (18') *hervorgeht, gleich* $+ 2\pi i$.

Die Verteilung der Unendlichkeitsstellen auf die beiden Blätter der Riemannschen Fläche ist in Fig. 66 pag. 457 durch Beifügung der Buchstaben α, β, γ, δ angedeutet.

Das Verhalten unserer Parameter auf der Riemannschen Fläche im vorliegenden Falle ist hiernach nicht ganz so einfach wie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Ihre Logarithmen sind jetzt nicht wie früher Normalintegrale dritter Gattung, da sie im Ganzen an drei Stellen der Riemannschen Fläche unendlich werden, nämlich je an zwei bei $v = \infty$ und je an einer bei $v = \pm 1$ gelegenen Stelle. Dieser Umstand hat für die spätere Darstellung durch die ϑ-Funktionen seine gewichtigen Konsequenzen.

Nunmehr gehen wir von den Logarithmen zu den Parametern selbst über. Dabei verwandelt sich die logarithmische Unstetigkeit (18') in eine einfache Nullstelle, die Unstetigkeit (18) aber in eine Unendlichkeitsstelle, in deren Umgebung sich α (und entsprechend β, γ und δ) wie $C\sqrt{v}$ verhält. Hieraus folgt, *dafs unsere Parameter im Unendlichen der Riemannschen Fläche verzweigt sind;* sie ändern sich nämlich bei einem auf der Fläche geschlossenen Umlauf um einen der beiden Punkte $v = \infty$ im Vorzeichen. Überall sonst sind sie relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt und bleiben dementsprechend bei allen denjenigen Umläufen ungeändert, welche den Wert von t ungeändert lassen. Ferner

nehmen sie bei den „Periodenumläufen", bei denen sich t um 2ω bez. $4i\omega'$ vermehrt, gewisse charakteristische Faktoren an, deren Logarithmen als Perioden der Integrale (17) berechnet werden könnten.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir den Umkehrgedanken aus § 3 dieses Kapitels auf. Wir betrachten also von jetzt an t als unabhängige Variable und deuten diese in einer komplexen t-Ebene. In dieser Ebene zeichnen wir das früher beschriebene schachbrettartige Muster (vgl. Figur 64), welches die Ebene in unendlich viele Rechtecke einteilt, mit dem Unterschiede, dafs die Länge der horizontalen und vertikalen Rechtecksseiten jetzt 2ω und $4\omega'$ beträgt. Jedes einzelne dieser Rechtecke stellt eine konforme Abbildung unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor.

Es genügt nun (wie früher) die Werteverteilung der Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in einem dieser Rechtecke zu verfolgen, weil der Übergang zu den benachbarten Rechtecken durch Multiplikation mit den vorher genannten Konstanten bewerkstelligt wird. Betrachten wir z. B. (vgl. Fig. 67) das Rechteck mit den Ecken

$$\omega + 2i\omega', \quad -\omega + 2i\omega', \quad -\omega - 2i\omega', \quad \omega - 2i\omega'.$$

Da jeder Parameter auf der Riemannschen Fläche an einer Stelle 0 und an zwei Stellen ∞ wird, mufs es auch in unserem Rechtecke, welches ja ein eindeutiges Abbild der Fläche ist, für jeden Parameter eine Nullstelle und zwei Unendlichkeitsstellen geben. Wie liegen diese Stellen?

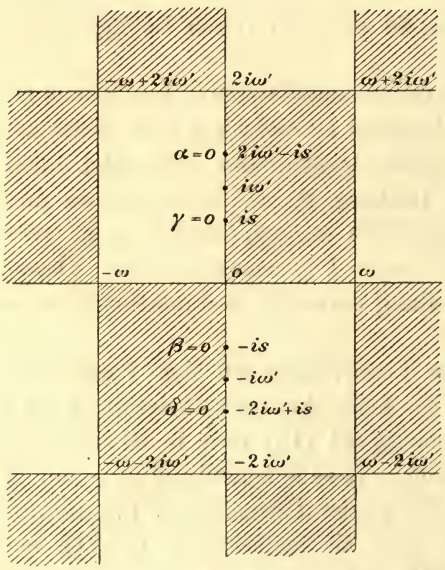


Fig. 67.

Um die Nullstellen zu ermitteln, berechnen wir den Wert des Integrals erster Gattung t von e bis 1. Da e einen Cosinus bedeutet (den Cosinus des kleinsten Winkels, welchen die Axe Z mit der Axe z bei der Kreiselbewegung bildet), so ist jedenfalls $e \leqq 1$ und der Wert des genannten Integrales imaginär. Wir setzen ihn gleich is und haben, da $\sqrt{V}$ nur die Quadrate von v enthält:

$$(19) \qquad is = \int_e^1 \frac{dv}{\sqrt{V}} = -\int_{-e}^{-1} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Hiernach sind die Nullstellen von γ und β direkt gegeben durch $t = +is$ und $t = -is$. Um ferner zu den Nullstellen von α und δ zu gelangen, gehen wir entweder im oberen oder unteren Blatte von e durch das Unendliche hindurch nach $-e$ und von da nach dem Punkte $v = -1$. Das Integral t nimmt hierbei einen der Werte $\pm 2i\omega' \pm is$ an. Von diesen liegen, als Punkte der t-Ebene gedeutet, die Werte $2i\omega' - is$ und $-2i\omega' + is$ in unserem Periodenrechteck. *Der eine von ihnen liefert die Nullstelle von α, der andere die von δ.* Wie sich im Einzelnen die Nullstellen von γ und β auf die Punkte $\pm is$ und die Nullstellen von δ und α auf die Punkte $\pm(2i\omega' - is)$ verteilen, ist nicht schwer zu entscheiden. Wir gehen hierauf indessen nicht ein, sondern verweisen dieserhalb auf Figur 67.

Die Lage der Unendlichkeitsstellen ferner ist durch den Wert des Integrales

$$\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

charakterisiert. Hierfür können wir auch schreiben, da V nur gerade Potenzen von v enthält:

$$\frac{1}{2}\left(\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}\right)$$

Der Wert dieses Ausdruckes ist aber nach Gleichung (12′) bekannt, nämlich gleich $i\omega'$. Verlegen wir den Integrationsweg in das andere Blatt, so ergiebt sich ersichtlich $-i\omega'$ statt $+i\omega'$. *In der t-Ebene entsprechen daher den beiden übereinander liegenden Punkten $v = \infty$, den Unendlichkeitsstellen unserer Parameter, die Punkte $t = \pm i\omega'$.*

Aufser den angegebenen und in Figur 67 verzeichneten Punkten sind natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte, welche sich von jenen um die Periodenvielfache $2m\omega + 4m'i\omega'$ unterscheiden, gleichfalls Null- bez. Unendlichkeitsstellen. Die Ordnung des Null- und Unendlichwerdens ist dabei dieselbe wie auf der Riemannschen Fläche. Die Ordnung der Nullstellen ist durchweg gleich 1, die der Unendlichkeitsstellen gleich $\frac{1}{2}$.

Auf die Lage der Null- und Unendlichkeitsstellen gründen wir nun die analytische Darstellung unserer Parameter durch ϑ-Quotienten. Dabei ist wohl zu bemerken, dafs an der Definition der ϑ-Funktion (vgl. pag. 418) eine kleine Änderung deshalb vorzunehmen ist, weil die Perioden unseres Integrals erster Gattung, welche früher 2ω und $2i\omega'$ hiefsen, jetzt mit 2ω und $4i\omega'$ bezeichnet wurden. Dementsprechend

ist in der Reihendarstellung sowie in den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion etc. durchweg $2\omega'$ durch $4\omega'$ zu ersetzen. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir diese ϑ-Funktion mit $\Theta(t)$ bezeichnen — allerdings sehr im Gegensatz zu der von Jacobi eingeführten Bedeutung dieses Zeichens — während wir die Bezeichnung $\vartheta(t)$ für die mit den Gröfsen 2ω, $2i\omega'$ gebildete Reihe reservieren. Ausführlich geschrieben lautet daher die Definition der beiden im Folgenden neben einander zu benutzenden Funktionen $\vartheta(t)$ und $\Theta(t)$ folgendermafsen:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 2i\omega') = e^{-\frac{\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{9\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

$$\Theta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 4i\omega') = e^{-\frac{2\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{18\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

Um zur Darstellung von α zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}.$$

Dieser wird an denselben Stellen und von derselben Ordnung null und unendlich wie unser Parameter α. Überdies ändert er sich ebenso wie dieser bei Vermehrung von t um 2ω bez. um $4i\omega'$ nur um konstante Faktoren. Dividieren wir also α durch diesen Quotienten, so bekommen wir eine nirgends im Endlichen verschwindende und nirgends unendlich werdende eindeutige Funktion, welche sich mit konstanten Faktoren multipliziert, wenn t um eine der Perioden vermehrt wird. Von einer solchen Funktion weist man aber genau so wie pag. 420 nach, dafs sie die Form $k e^{lt}$ haben mufs. *Mithin folgt:*

$$\alpha = k_1 e^{l_1 t} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}. \tag{20}$$

In entsprechender Weise ergiebt sich:

$$\begin{cases} \beta = k_2 e^{l_2 t} \dfrac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \gamma = k_3 e^{l_3 t} \dfrac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \delta = k_4 e^{l_4 t} \dfrac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}. \end{cases} \tag{20}$$

Hier sind noch die Konstanten k und l zu bestimmen.

Bezüglich der Konstanten l zeigen wir zunächst, dafs

$$l_4 = -l_1, \quad l_3 = -l_2 \tag{21}$$

sein mufs. Aus den Gleichungen (14′)

$$\alpha\delta = \frac{v+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{v-1}{2}$$

folgt nämlich, dafs diese Produkte ebenso wie v selbst doppelperiodische Funktionen mit den Perioden 2ω und $4i\omega'$ sind. Vermehren wir nun t um 2ω, so würde sich $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ bez. um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)2\omega}$$

ändern, da die in $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ auftretenden Θ-Funktionen im Quotienten ungeändert bleiben. Andrerseits würden sich dieselben Gröfsen, wenn wir t um $4i\omega'$ vermehren, um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)4i\omega'} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)4i\omega'}$$

ändern. Diese sämtlichen vier Faktoren sind also gleich 1 zu setzen, was nur dadurch zu erreichen ist, dafs wir, wie oben angegeben, $l_4 = -l_1$, $l_3 = -l_2$ nehmen.

Wir wollen ferner zeigen, dafs

$$l_2 = l_1 + \frac{\pi i}{2\omega} \tag{22}$$

ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einer der Gleichungen (14) aus, welche wir mit Rücksicht auf (5) so schreiben können:

$$\alpha\gamma = \frac{iBq - Ap}{2G}. \tag{23}$$

Nun zeigen aber die in den Gl. (9) für p^2 und q^2 berechneten Werte, dafs p und q bei einem einmaligen Umgang um die Verzweigungspunkte $v = e$ und $v = e'$, bei welchem t um 2ω wächst, sich im Vorzeichen ändern, dafs sie aber bei einem Umgange um die Punkte $v = e$ und $v = -e$, während dessen t um $4i\omega'$ wächst, ungeändert bleiben. Andrerseits würde nach den Gleichungen (20) und (21), wenn wir t um 2ω bez. $4i\omega'$ vermehren, $\alpha\gamma$ die Faktoren annehmen

$$e^{(l_1-l_2)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_1-l_2)4i\omega'}\, e^{-\frac{2\pi\omega'}{\omega}}.$$

Der erste dieser Faktoren ist also gleich -1, der zweite gleich $+1$ zu setzen. Dies führt mit Notwendigkeit auf die angegebene Relation (22).

Somit bleibt nur noch die eine Gröfse l_1 übrig. Ihr Wert ergiebt sich aus (20) durch logarithmische Differentiation:

$$l_1 = \frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\Theta(t-2i\omega'+is)}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\log\Theta(t+i\omega')}{dt} + \frac{d\log\Theta(t-i\omega')}{dt}\right\}. \tag{24}$$

Hier können wir für t irgend einen speziellen Wert einsetzen, für den der zugehörige Wert von v und also auch (nach (16′)) der Wert

von $\frac{d\log\alpha}{dt}$ bekannt ist. Z. B. kann man $t = -is$ nehmen, worauf

$$v = +1, \quad \sqrt{V} = -\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}, \quad \frac{d\log\alpha}{dt} = \frac{iG}{2C}$$

wird. Es folgt dann

$$(24') \qquad l_1 = \frac{iG}{2C} + \frac{\Theta'(2i\omega')}{\Theta(2i\omega')} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(i\omega' - is)}{\Theta(i\omega' - is)} - \frac{\Theta'(i\omega' + is)}{\Theta(i\omega' + is)}\right\}.$$

Hieraus erkennt man, dafs l_1 rein imaginär ist, so dafs wir l_1 lieber gleich il setzen, wo l reell ist.

Man könnte den Ausdruck für l_1 bez. für l leicht noch etwas vereinfachen; indessen legen wir hierauf keinen Wert, da wir im Folgenden *die Gröfse l selbst* neben den Gröfsen ω, ω' und s, welche allein zur Festlegung der Bewegung nicht ausreichen, *als eine der charakteristischen Konstanten der Poinsot-Bewegung* ansehen werden.

Die vollständige Tabelle unserer Konstanten l_i lautet nun folgendermafsen:

$$(25) \quad l_1 = il, \quad l_2 = i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right), \quad l_3 = -i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right), \quad l_4 = -il.$$

Um auch die Konstanten k zu bestimmen, gehen wir auf die Anfangswerte der α, β, γ, δ zur Zeit $t = 0$ zurück und drücken diese nach der ursprünglichen Definition von pag. 21 durch die Anfangswerte der Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ aus. Wir haben dann

$$\alpha_0 = \cos\frac{\vartheta_0}{2}\, e^{\frac{i(\varphi_0 + \psi_0)}{2}} \quad \text{etc.}$$

Die Anfangszeit $t = 0$ ist nun so gewählt, dafs in ihr $v = e$ und also, nach den Gleichungen (9), $q = 0$ wird. Aus (5) ergiebt sich aber, dafs mit q auch der Richtungscosinus c' zwischen der Y- und der z-Axe verschwindet. Der Winkel zwischen diesen beiden Axen ist also ein Rechter. Wir nannten aber diejenige Gerade der XY-Ebene, welche senkrecht zur z-Axe steht, die Knotenlinie. Mithin fallen für $t = 0$ die Knotenlinie und die Y-Axe zusammen. Es ist demnach $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Der Winkel ψ_0 ferner ist gänzlich in unsere Willkür gegeben. In der That kann der Verlauf der Bewegung in keiner Weise davon abhängen, wie wir das xyz-System im Raume orientieren. Wir können insbesondere also auch die x-Axe in der Anfangslage mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen und dementsprechend $\psi_0 = 0$ wählen. Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs

$$(26) \qquad \alpha_0 = -\delta_0, \quad \beta_0 = -\gamma_0$$

wird. Setzen wir andrerseits in den Gleichungen (20) $t = 0$, so er-

kennen wir, dafs nach diesen Gleichungen

$$\frac{\alpha_0}{k_1} = -\frac{\delta_0}{k_4}, \quad \frac{\beta_0}{k_2} = -\frac{\gamma_0}{k_3} \tag{26'}$$

wäre. Damit die letzten Gleichungen mit den vorhergehenden verträglich sind, mufs notwendig

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3 \tag{27}$$

genommen werden.

Um schliefslich den gemeinsamen Wert von k_1 und k_4 einerseits, von k_2 und k_3 andrerseits zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichungen (14') zurück. Hier wollen wir die rechterhand stehenden doppeltperiodischen Funktionen von t

$$\frac{v \pm 1}{2}$$

durch t darstellen. Da $v+1$ für $t = \pm(2i\omega' - is)$ verschwindet und für $t = \pm i\omega'$ unendlich wird, so hat der Ausdruck

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}$$

dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen in der t-Ebene wie $v+1$. Er ist überdies gleichfalls eine doppeltperiodische Funktion und kann sich daher von $\frac{v+1}{2}$ nur um eine Konstante unterscheiden. Wir haben also

$$\frac{v+1}{2} = C\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}. \tag{29}$$

und entsprechend

$$\frac{v-1}{2} = C'\frac{\Theta(t - is)\,\Theta(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}. \tag{29'}$$

Die Werte der hiermit eingeführten Konstanten C und C', welche natürlich nicht mit dem Trägheitsmomente C verwechselt werden dürfen, ergeben sich leicht, wenn wir etwa in (29) $t = is$, in (29') $t = 2i\omega' - is$ einsetzen. Dann werden die linken Seiten gleich $+1$ bez. -1, und die Θ-Quotienten der rechten Seiten gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}$$

bez. gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(3i\omega' - is)} = \frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}\, e^{-\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}}$$

Mithin haben wir

$$C = \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}, \quad C' = -e^{\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}} C. \tag{30}$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (28) linkerhand die Werte der α, β, γ, δ aus (20) ein und drücken wir die rechten Seiten nach (29) aus, so heben sich die von t abhängigen Bestandteile heraus und wir erhalten unmittelbar:

$$k_1 k_4 = C, \quad k_2 k_3 = C',$$

also mit Rücksicht auf (27):

$$k_1 = \sqrt{C}, \quad k_2 = \sqrt{C'}, \quad k_3 = \sqrt{C'}, \quad k_4 = \sqrt{C} \tag{31}$$

Die Vorzeichen dieser sowie der in (20) vorkommenden Quadratwurzeln sind so zu wählen, dafs die aus letzteren entspringenden Werte von α_0, β_0, γ_0, δ_0 mit dem vorher besprochenen Anfangszustande übereinstimmen.

Alles Vorhergehende zusammenfassend können wir also unsere Parameter durch das nachstehende elegante Gleichungssystem darstellen:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{C}\, e^{ilt}\, \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\
\beta &= i\sqrt{C}\, e^{ilt}\, e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)}\, \frac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\
\gamma &= i\sqrt{C}\, e^{-ilt}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}\, \frac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\
\delta &= \sqrt{C}\, e^{-ilt}\, \frac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}; \\
C &= \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Durch diese Gleichungen sind die sämtlichen Poinsot-Bewegungen in ein einheitliches analytisches Schema gebracht. Wenn wir für die vier darin auftretenden Konstanten ω, ω', s und l alle möglichen reellen Werte einsetzen, müssen sich alle möglichen Bewegungen des kräftefreien Kreisels ergeben. Durch eine Abzählung überzeugt man sich übrigens leicht, dafs unsere vier Konstanten wirklich von einander unabhängig sind, ihre Zahl also nicht weiter herabgedrückt werden kann. Alle weiteren Sätze, welche wir im Folgenden aufstellen werden, sind einfache Folgerungen aus diesem analytischen Schema.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die Bahnkurve, welche irgend ein Punkt des Kreisels, der von O den Abstand 1 hat, im Raume beschreibt. (Die Bahnkurven aller übrigen Kreiselpunkte, deren Abstand von O nicht gleich 1 ist, sind natürlich jenen Bahnkurven geometrisch ähnlich.) Die Lage des betreffenden Punktes gegen den Kreisel charakterisieren wir wie früher durch die komplexe Gröfse Λ, die Lage im Raume durch λ.

Dann besteht zwischen λ und Λ die uns von früher her bekannte Beziehung:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}. \tag{33}$$

Tragen wir hier für α, β, γ, δ die gefundenen Werte ein, so ist λ als Funktion von t bekannt. Diese Funktion liefert dann in der früher beschriebenen Weise direkt die stereographische Projektion der Bahnkurve auf die xy-Ebene.

Besonders einfach wird die Gleichung für die Bahnkurve der im Abstande 1 *von O auf der Z-Axe gelegenen Punkte.* Wir wählen den auf der positiven Z-Axe gelegenen Punkt aus; (für den auf der negativen Z-Axe gilt das Folgende mutatis mutandis gleichfalls). Diesem entspricht nach Gleichung (1′) von pag. 430 der Wert $\Lambda = \infty$; der zugehörige Wert von λ werde mit λ_Z bezeichnet. Die Gleichung der Bahnkurve in stereographischer Projektion lautet daher nach (33) einfach

$$\lambda_Z = \frac{\alpha}{\gamma}$$

oder, wenn wir aus (32) einsetzen:

$$\lambda_Z = -ie^{2ilt + \frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\Theta(t - is)}. \tag{34}$$

Ganz entsprechende Darstellungen müssen sich aber auch für die Bahnkurven von Punkten der anderen Hauptaxen aufstellen lassen, da man ja die Bezeichnung der Axen vertauschen kann. Diese Darstellungen lassen sich auch direkt aus der Gleichung (33) herleiten. Wir setzen hier für Λ diejenigen Werte ein, welche den im Abstande 1 von O auf der positiven Y- und X-Axe gelegenen Punkten zukommen. Es sind dieses (s. Gleichung (1′) von pag. 430) die Werte $\Lambda = i$ und $\Lambda = 1$. Die Gleichung der Bahnkurve für diese Punkte lautet daher:

$$\lambda_Y = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}, \quad \lambda_X = \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}.$$

Man überzeugt sich nun, indem man aus (32) einsetzt, dafs auch diese Ausdrücke als einfache Theta-Quotienten geschrieben werden können. Dabei sind aber die Perioden der hier auftretenden Thetas nicht wie bisher 2ω, $4i\omega'$, sondern vielmehr bei λ_Y 4ω, $2i\omega'$ und bei λ_X 4ω, $2\omega + 2i\omega'$. Der Grund für diese Verschiedenartigkeit der Perioden liegt, wie man noch näher ausführen könnte, offenbar darin, dafs wir bei der Auswahl der Integrationsvariabeln v und bei der Berechnung von t die auf unsere drei Axen XYZ bezüglichen Daten (p, q, r, A, B, C etc.) in unsymmetrischer Weise benutzt haben.

Die Umrechnung der vorstehenden Thetaausdrücke in die neuen mit halbierten bez. verdoppelten Perioden gehört in ein von den Mathematikern

vielfach angebautes und in theoretischer Hinsicht wichtiges Gebiet, in die sog. *Transformationstheorie der elliptischen Funktionen.* Es ist sehr interessant, dafs diese aus rein abstrakten Gesichtspunkten entwickelte Theorie, die wir im Folgenden noch mehrfach streifen werden, bei unserer Behandlung der Poinsot-Bewegung eine konkrete Anwendung findet. Leider können wir hier unmöglich ausführlich auf diese Theorie eingehen; wir müssen uns darauf beschränken, soviel als für den gerade vorliegenden Zweck erforderlich ist, davon mitzuteilen und ad hoc abzuleiten.

Durch die angedeuteten Überlegungen erkennt man nun die Richtigkeit der folgenden zusammenfassenden Angabe:

Die Bahnkurve, welche ein im Abstande 1 *von O gelegener Punkt einer der drei Hauptaxen bei der Poinsotbewegung beschreibt, läfst sich allemal in bemerkenswert einfacher Form durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades beschreiben. Die Perioden dieser elliptischen Funktion sind, je nachdem es sich um einen Punkt der Z-, Y- oder X-Axe handelt,* 2ω, $4i\omega'$, *oder* 4ω, $2i\omega'$ *oder endlich* 4ω, $2\omega + 2i\omega'$.

Dagegen verhalten sich die Ausdrücke für λ, welche nach Gl. (33) den Bahnkurven der übrigen Kreiselpunkte entsprechen, bei Vermehrung von t um eine der Perioden 2ω, $4i\omega'$ nicht rein multiplikativ; sie sind daher nicht als elliptische Funktionen zu bezeichnen.

Sodann betrachten wir der Vollständigkeit halber die neun Richtungscosinus $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, welche die Axen des beweglichen XYZ-Systems mit den Axen des festen xyz-Systems bilden. Wir wollen mit Hülfe von Umrechnungen, welche abermals in die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hineingehören, zeigen, dafs auch diese Gröfsen sich in sehr einfacher Weise, *nämlich als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mit den Perioden* 2ω, $2i\omega'$ darstellen lassen. Genauer gesagt, gilt dieses nicht von den Richtungscosinussen selbst, sondern einerseits von den komplexen Verbindungen derselben

$$a + ib, \quad a' + ib', \quad a'' + ib'',$$

(sowie den konjugierten Gröfsen) und andrerseits von den Cosinussen

$$c, \quad c', \quad c''.$$

Wir schreiben uns zunächst die Ausdrücke dieser Gröfsen in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hin, welche sich unmittelbar durch Vergleich der Schemata (3) und (9) von pag. 17 und 21 ergeben und verifizieren an den fertigen Ausdrücken die Richtigkeit des angegebenen Resultates. Die fraglichen Ausdrücke lauten:

$$(35)\quad \begin{cases} a+ib=\alpha^2-\beta^2, & a'+ib'=\ \ i(\alpha^2+\beta^2), & a''+ib''=-2\alpha\beta, \\ c=-\alpha\gamma+\beta\delta, & c'=-i(\alpha\gamma+\beta\delta), & c''=\alpha\delta+\beta\gamma. \end{cases}$$

Betrachten wir etwa die erste dieser Gröfsen, $a + ib$. Nach Gleichung (32) haben wir:

$$(36)\quad a + ib = Ce^{2iit}\,\frac{\Theta^2(t - 2i\omega' + is) + e^{\frac{i\pi}{\omega}(t - i\omega' + is)}\,\Theta^2(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}.$$

Der Nenner verschwindet für $t = i\omega' + 2m\omega + 4m'i\omega'$, sowie für $t = -i\omega' + 2m\omega + 4mi\omega'$. In ihrer Gesamtheit sind also die Nullstellen des Nenners gegeben durch

$$t = -i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega',$$

Ferner verschwindet der Zähler, wie man leicht aus den Eigenschaften der Θ-Funktion folgert für $t = \omega + i\omega' - is + 2m\omega + 4m'i\omega'$ und für $t = \omega - i\omega' - is + 2m\omega + 4m'i\omega'$. Die Gesamtheit dieser t-Werte läfst sich so schreiben

$$t = \omega + i\omega' - is + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Überdies ändern sich Zähler und Nenner, nachdem man sie noch mit dem gemeinsamen Faktor $e^{-\frac{t\pi i}{2\omega}}$ multipliziert hat, bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren

$$-1,\ +e^{\frac{\pi\omega'}{\omega} - \frac{i\pi}{\omega}(t + is - i\omega')} \quad \text{(Zähler)},$$

$$-1,\ -e^{\frac{\pi\omega'}{\omega} - \frac{i\pi}{\omega}(t + i\omega')} \quad \text{(Nenner)}.$$

Dies sind aber gerade diejenigen Faktoren, um welche sich auch Zähler und Nenner des folgenden mit den Perioden 2ω, $2i\omega'$ gebildeten ϑ-Quotienten ändern, mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen von $a + ib$ übereinstimmen:

$$\frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

Von diesem kann sich also die obige Kombination von Θ-Reihen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir bekommen somit die folgende Relation zwischen den Θ-Funktionen von den Perioden 2ω, $4i\omega'$ und den ϑ-Reihen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$:

$$(37)\quad \left\{ C\,\frac{\Theta^2(t - 2i\omega' + is) + e^{\frac{i\pi}{\omega}(t - i\omega' + is)}\,\Theta^2(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')} = C_1\,\frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')}.\right.$$

Zur Bestimmung von C_1 setzen wir $t = -is$, worauf die linke Seite wegen des in (32) angegebenen Wertes von C übergeht in

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')}.$$

Wir haben also zunächst

$$C_1 = \frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} \cdot \frac{\vartheta(is - i\omega')}{\vartheta(\omega + i\omega')}. \tag{37'}$$

Dieser Wert läfst sich aber noch weiter vereinfachen und ganz auf ϑ-Funktionen zurückführen. Wir stellen zu dem Zwecke die folgende allgemeine Relation*) voran:

$$\frac{\Theta(2t)}{\Theta(2t_1)} = \frac{\vartheta(t)\,\vartheta(t+\omega)}{\vartheta(t_1)\,\vartheta(t_1+\omega)}. \tag{38}$$

Um ihre Richtigkeit einzusehen, bemerke man, dafs sich die Zähler der rechten und linken Seite bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ genau um die gleichen Faktoren ändern. Die Zähler sind also bis auf eine multiplikative Konstante einander gleich. Setzt man noch $t = t_1$, so sieht man, dafs diese Konstante richtig gewählt ist.

In Gleichung (38) wollen wir nun insbesondere die Werte $t = i\omega'$, $t_1 = is - i\omega'$ eintragen. Dann folgt:

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(\omega + i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')\,\vartheta(\omega + is - i\omega')}.$$

Mithin können wir statt (37') einfacher schreiben:

$$C_1 = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}. \tag{39}$$

Die Gleichung (36) für die gesuchte Gröfse $a + ib$ nimmt daher wegen (37) und (39) die folgende definitive Form an:

$$a + ib = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')} \frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}.$$

In ganz entsprechender Weise kann man die sämtlichen in (35) angegebenen Ausdrücke umrechnen und auf ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$ reduzieren. *Wir stellen die Resultate in der folgenden Tabelle zusammen:*

$$\text{(40)} \quad \begin{cases} a + ib = \dfrac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}, \\ a' + ib' = i \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega')\,\vartheta(t + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}, \\ a'' + ib'' = i \dfrac{\vartheta(\omega)\,\vartheta(t + is)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt} e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)}, \\ c = \dfrac{\vartheta(is)\,\vartheta(t - \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\ c' = i \dfrac{\vartheta(\omega + is)\,\vartheta(t)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\ c'' = \dfrac{\vartheta(is + i\omega')\,\vartheta(t + i\omega' + \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{\pi s}{\omega}}. \end{cases}$$

*) Auch diese Formel, ebenso wie die Gleichung (37) etc. wird in der Lehre von der Transformation der elliptischen Funktionen systematisch entwickelt.

Wir haben in diesen Gleichungen das wesentlichste Resultat einer berühmten Arbeit von Jacobi*) (Sur la rotation d'un corps etc.) auf einem neuen Wege abgeleitet. Dasselbe lautet in unserer Terminologie folgendermafsen:

Die neun Richtungscosinus zwischen den Axen des beweglichen und des festen Koordinaten-Systems (oder richtiger die angegebenen komplexen Kombinationen derselben) sind sämtlich elliptische Funktionen ersten Grades von den Perioden 2ω *und* $2i\omega'$.

Wir gehen schliefslich zur Betrachtung der *Polhodie-* und *Herpolhodiekurve***) der Poinsot-Bewegung über.

Über die Polhodiekurve vorderhand nur wenige Worte. Nach den Gleichungen (5) sind ihre Koordinaten p, q, r den Richtungskosinussen c, c', c'' proportional; sie stellen sich daher ebenso wie diese durch *elliptische Funktionen ersten Grades* dar. Dabei werden die Faktoren, mit denen sich p, q, r bei Vermehrung von t um die Perioden 2ω, $2i\omega'$ multiplizieren, besonders einfach, nämlich gleich ± 1, wie aus den Gleichungen (40) ersichtlich. Dies ergiebt sich auch aus dem Umstande, dafs die Gröfsen p^2, q^2 und r^2 als ganze Funktionen von v doppeltperiodisch sein, d. h. bei Periodenzuwächsen den Faktor $+1$ aufweisen müssen. Bei den Quadratwurzeln p, q, r werden daher nur die Faktoren ± 1 auftreten können.

Ausführlicher gehen wir auf die Herpolhodiekurve ein. Ihre Gleichung schreiben wir in der Form von pag. 44 an:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right),$$

$$-\varrho = 2i\left(\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Setzen wir in die erste Gleichung die Werte von α und β aus (32) ein, so erhalten wir:

$$\pi + i\varkappa = 2i\alpha\beta\left(\frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right)$$

$$= -2C\,\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}\,e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\cdot\left\{\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)} - \frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)} - \frac{i\pi}{2\omega}\right\}.$$

Hier wollen wir abermals zu ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ übergehen. Bemerken wir zunächst, dafs die Klammer sich bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren $+1$ und -1 ändert. Dieselben Änderungen erleidet aber der Quotient:

*) Vgl. Ges. Werke Bd. 2 pag. 293 oder Crelles Journal Bd. 39.

**) Die Darstellung der Polhodiekurve und teilweise auch die der Herpolhodiekurve durch elliptische Funktionen ist zum ersten Male von Rueb in seiner Dissertation, Utrecht 1834, gegeben.

$$\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)},$$

mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen unserer Klammer übereinstimmen. Wir haben also

$$\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)} - \frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)} - \frac{i\pi}{2\omega} = C_1 \frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)}.$$

Die Konstante C_1 bestimmen wir, indem wir etwa $t = -is$ setzen, zu

$$C_1 = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega)}.$$

Desgleichen läfst sich der Θ-Quotient vor der Klammer in ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$ umrechnen. Es wird nämlich offenbar

$$C\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')} = C_2\frac{\vartheta(t+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Die eingeführte Konstante C_2 bestimmt sich wieder, wenn wir $t = -is$ setzen. Mit Rücksicht auf den Wert von C aus (32) wird dann zunächst:

$$C_2 = \frac{\Theta'(0)\,\vartheta(i\omega'-is)}{\Theta(2i\omega'-2is)\,\vartheta'(0)}.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Quotienten gehen wir auf die Gleichung (38) zurück. Setzen wir daselbst $t=0$, $t_1 = i\omega' - is$, so erhalten wir:

$$\frac{2\,\Theta'(0)}{\Theta(2i\omega'-2is)} = \frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(\omega)}{\vartheta(i\omega'-is)\,\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

Mithin wird

$$C_2 = \frac{1}{2}\frac{\vartheta(\omega)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

Hiernach ergiebt sich für $\pi + ix$ der folgende definitive Wert:

$$(41)\quad \pi + ix = -\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}\,e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\,\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Dieser Ausdruck weist die gröfste Analogie mit dem früheren Ausdruck für die Herpolhodiekurve des schweren symmetrischen Kreisels (Gleichung (13) und (13′) von pag. 437) auf. Er ist nicht nur gleichfalls eine *elliptische Funktion ersten Grades*, sondern er kann auch, indem wir für s eine geeignete Substitution machen, direkt in jenen übergeführt werden. Im folgenden Paragraphen werden wir aus dieser Bemerkung wichtige Konsequenzen zu ziehen haben.

In entsprechender Weise können wir noch den Ausdruck von ϱ bilden. Nach Früherem (vgl. pag. 124) wissen wir, dafs ϱ eine Konstante $\left(=\frac{2h}{G}\right)$ ist. Wir können daher in dem oben angegebenen allgemeinen Werte von ϱ sogleich ein spezielles t einsetzen, z. B. $t = +is$

Dann verschwindet γ und es wird gleichzeitig (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$. Wir bekommen daher

$$-\varrho = 2i\alpha\delta\left(\frac{d\log\alpha}{dt}\right) = 2i\,\frac{d\log\alpha}{dt},$$

d. h.

$$-\varrho = 2i\left(il + \frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')}\right\}\right).$$

Auch hier wollen wir von den Θ- zu den ϑ-Funktionen übergehen. Wir erreichen dieses durch die folgenden Substitutionen:

$$\frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega + is - i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}\right\}$$

und

$$\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')} = \frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} - \frac{i\pi}{2\omega}.$$

Die erste dieser Gleichungen folgt aus (38) durch logarithmische Differentiation; die zweite verifiziert man, wenn man die rechte und linke Seite auf ihr Verhalten bei Periodenzuwächsen vergleicht und eine additive Konstante richtig bestimmt.

Statt des ursprünglichen Wertes von ϱ können wir auf solche Weise schreiben:

$$-\varrho = i\left(2il + \frac{3i\pi}{2\omega} + \frac{\vartheta'(\omega + is + i\omega')}{\vartheta(\omega + is + i\omega')}\right). \tag{42}$$

Als Gesamtresultat dieses Paragraphen ergiebt sich, dafs auch für die Behandlung der Poinsot-Bewegungen unsere Parameter α, β, γ, δ ein sehr geeignetes Instrument liefern. Sind ihre Ausdrücke in Θ-Reihen einmal gefunden, so haben wir die Darstellung aller übrigen Elemente der Bewegung in der Hand. Zwar waren diese Ausdrücke selbst hier nicht ganz so einfach, wie in der Theorie der schweren Kugelkreisels; auch konnten wir beim Übergang von den Θ- zu den ϑ-Funktionen etwas umständliche Umrechnungen nicht vermeiden. Diese liegen aber in der Natur der Sache begründet und haben im Hinblick auf die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen an sich ein gewisses Interesse. Wollten wir die Benutzung unserer Θ-Reihen überhaupt vermeiden und mit Jacobi etwa direkt auf die Ausdrücke der neun Richtungskosinusse ausgehen, so würde die Vollständigkeit der Entwickelungen darunter leiden. Insbesondere würden uns die schönen Resultate über die von einem Punkte der Hauptträgheitsaxen beschriebenen Bahnkurven entgangen sein.

§ 8. Konjugierte Poinsot-Bewegungen. Jacobis Theorem über den Zusammenhang zwischen der Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen und des schweren Kugelkreisels.

Nachdem die Behandlung der einzelnen Poinsot-Bewegung erledigt ist, kommen wir nun dazu, die Beziehungen zweier in bestimmter Weise einander zugeordneter, sog. „konjugierter" Poinsot-Bewegungen zu schildern. Dabei wird sich ein in der Litteratur viel genanntes Theorem von Jacobi ergeben, welches einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Bewegung des schweren Kugelkreisels und der Theorie der konjugierten Poinsot-Bewegungen statuiert.

Zu dem Zweck gehen wir nochmals auf die Polhodiekurve zurück und zeigen, dafs ein und dieselbe Polhodiekurve stets in doppelter Weise als Polhodiekurve einer Poinsot-Bewegung aufgefafst werden kann, dafs sie nämlich gleichzeitig die Polhodiekurve für zwei verschiedene reelle kräftefreie Kreisel darstellt.

Eine Polhodiekurve besteht (vgl. die Figur von pag. 131) stets aus zwei symmetrisch gleichen Ästen. Beschreibt der Punkt mit den Koordinaten p, q, r den einen Ast, so durchläuft der Punkt $-p$, $-q$, $-r$ den anderen Ast in entgegengesetzter Richtung. Bei der einzelnen Poinsot-Bewegung wird natürlich nur der eine Ast von dem Endpunkt des Drehungsvektors bestrichen.

Wir fragen, ob der andere Ast die gleiche Rolle bei einer anderen Poinsot-Bewegung spielt.

Die Antwort ergiebt sich sofort aus den Eulerschen Gleichungen. Nach Voraussetzung genügen die Koordinaten p, q, r den Gleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A}qr, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}rp, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C}pq.$$

Dann erfüllen aber ersichtlich die Koordinaten des diametralen Punktes $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ die folgenden Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{B-C}{A}q'r', \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{C-A}{B}r'p', \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{A-B}{C}p'q'.$$

Die Gröfsen p', q', r' gehören also einem anderen Kreisel als Drehungskomponenten hinzu, dessen Trägheitsmomente — wir wollen sie mit A', B', C' bezeichnen — *mit den Trägheitsmomenten des ursprünglichen Kreisels durch die Relationen verbunden sind:*

$$(2)\quad \frac{B'-C'}{A'} = -\frac{B-C}{A}, \quad \frac{C'-A'}{B'} = -\frac{C-A}{B}, \quad \frac{A'-B'}{C'} = -\frac{A-B}{C}.$$

Wir haben zunächst zu zeigen, dafs durch diese Gleichungen ein *reeller* Kreisel definiert wird, d. h., dafs eine Massenverteilung von den

Hauptträgheitsmomenten A', B', C' möglich ist. Zu dem Zwecke genügt es, sich zu überzeugen, I) dafs die Gröfsen A', B', C' sämtlich positiv sind, und II) dafs sie den bekannten Ungleichungen von pag. 100 (denselben Ungleichungen, welche auch zwischen den Seiten eines gewöhnlichen Dreiecks bestehen,) genügen.

I) Die Gleichungen (2) stellen drei lineare homogene Gleichungen für die Unbekannten A', B', C' dar; durch diese sind natürlich nur die Verhältnisse $A' : B' : C'$ bestimmt. Und zwar finden wir durch Auflösung dieser Gleichungen leicht:

$$(3)\quad A' : B' : C' = A(B + C - A) : B(C + A - B) : C(A + B - C).$$

Die rechts stehenden Gröfsen sind aber sämtlich positiv, da ja die A, B, C den für die Realität des ursprünglichen Kreisels erforderlichen Ungleichungen genügen sollen. Wählen wir also, was gestattet ist, eine der Gröfsen A', B', C' als positiv, so werden nach der vorstehenden Proportion auch die beiden anderen Gröfsen positiv sein müssen.

II) Hätten wir umgekehrt die Gleichungen (2) nach den A, B, C aufgelöst, so hätten wir offenbar die folgende Proportion erhalten:

$$(3')\quad A : B : C = A'(B' + C' - A') : B'(C' + A' - B') : C'(A' + B' - C').$$

Hiernach verhalten sich also auch die drei Gröfsen $B' + C' - A'$, $C' + A' - B'$, $A' + B' - C'$ wie drei positive Zahlen. Da doch mindestens eine von ihnen positiv sein mufs, werden es also auch die beiden anderen sein.

Hiermit ist unser Kreisel A', B', C' als reell nachgewiesen.

Wir wollen ferner auch die Konstanten $2h'$ und G' unseres zweiten Kreisels mit den Konstanten $2h$ und G des ersten in Zusammenhang bringen. Dafs nämlich die Drehkomponenten p', q', r' zwei Integralgleichungen von der Form

$$A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2 = 2h',$$
$$A'^2p'^2 + B'^2q'^2 + C'^2r'^2 = G'^2$$

genügen, ist von vornherein klar, da diese Gleichungen eine direkte analytische Folge der (in den A', B', C' geschriebenen) Eulerschen Gleichungen (1) sind. Der fragliche Zusammenhang ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (11) von pag. 457. Wir schreiben uns diese in der folgenden Form auf:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{2hA - G^2}{BC} = \dfrac{A - B}{C}\, q^2 + \dfrac{A - C}{B}\, r^2, \\ \dfrac{2hB - G^2}{CA} = \dfrac{B - A}{C}\, p^2 + \dfrac{B - C}{A}\, r^2, \\ \dfrac{2hC - G^2}{AB} = \dfrac{C - A}{B}\, p^2 + \dfrac{C - B}{A}\, q^2. \end{cases}$$

$$(4') \qquad \begin{cases} \dfrac{2h'A' - G'^2}{B'C'} = \dfrac{A' - B'}{C'} q'^2 + \dfrac{A' - C'}{B'} r'^2, \\ \dfrac{2h'B' - G'^2}{C'A'} = \dfrac{B' - A'}{C'} p'^2 + \dfrac{B' - C'}{A'} r'^2, \\ \dfrac{2h'C' - G'^2}{A'B'} = \dfrac{C' - A'}{B'} p'^2 + \dfrac{C' - B'}{A'} q'^2. \end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungstripeln sind nun die rechten Seiten einander entgegengesetzt gleich. Mithin ergeben sich die folgenden Relationen:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{2h'A' - G'^2}{B'C'} = -\dfrac{2hA - G^2}{BC}, \quad \dfrac{2h'B' - G'^2}{C'A'} = -\dfrac{2hB - G^2}{CA}, \\ \dfrac{2h'C' - G'^2}{A'B'} = -\dfrac{2hC - G^2}{AB}, \end{cases}$$

von denen die dritte vermöge (2) eine Folge der beiden ersten ist. Zwei von ihnen können darauf zur Bestimmung der Verhältnisse von h' und G' zu den Trägheitsmomenten A', B', C' benutzt werden. Somit sind die 5 Konstanten A', B', C', h', G' bis auf einen Proportionalitätsfaktor bekannt. Auf diesen Faktor, welcher notwendig unbestimmt bleibt, kommt es aber bei der Bewegung in keiner Weise an.

Die durch die Verhältnisse $A' : B' : C' : h' : G'$ definierte Poinsot-Bewegung ist die oben erwähnte, zu der Bewegung $A : B : C : h : G$ *konjugierte*. Umgekehrt ist diese letztere Bewegung, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Gleichungen folgt, die konjugierte zu jener ersteren. Man bemerke noch, dafs, wenn für den einen der beiden konjugierten Kreisel, wie wir voraussetzten, die Beziehung

$$A > B > C$$

gilt, dafs dann für den anderen Kreisel die Ungleichung

$$A' < B' < C'$$

folgt; ferner, dafs, wenn die eine der beiden konjugierten Kreiselbewegungen, wie wir annahmen, zu der Klasse

$$2hB - G^2 > 0$$

gehört, dafs dann die andere Bewegung in die Klasse

$$2h'B' - G'^2 < 0$$

hineingehört.

Wir müssen ferner den Zusammenhang zwischen den „transcendenten" Konstanten ω, ω', s und l beider konjugierter Kreisel, welche für uns noch wichtiger sind, wie die „elementaren" Konstanten $A : B : C : h : G$, feststellen.

Zunächst sieht man, dafs die Konstanten ω und ω' für beide Kreisel dieselben sind. Die Gleichheit von ω ergiebt sich ohne Weiteres aus

der Bedeutung dieser Gröfse. ω bedeutet nämlich, wie wir sagen können, die Zeit, während welcher der Drehungsvektor den zwischen den Koordinatenebenen $q = 0$ und $p = 0$ ausgespannten Bogen der Polhodiekurve bestreicht. In der That wird nach den Gleichungen (9) des vorigen Paragraphen $q = 0$ für $v = e$, d. h. für $t = 0$ und $p = 0$ für $v = e'$, d. h. für $t = \omega$. Die beiden diametralen Äste der Polhodiekurve und insbesondere der eben genannte Bogen, (aus dessen kongruenter und symmetrisch gleicher Wiederholung sich die ganze Polhodiekurve zusammensetzt), werden aber von den Drehungsvektoren der konjugierten Kreisel in demselben Tempo durchlaufen. Also mufs in der That ω für beide Kreisel gleich sein.

Die Gleichheit von ω' ferner könnten wir ähnlich erweisen, wenn wir den vorstehenden Schlufs auch für imaginäre Werte der Zeit zulassen wollen. Wir können aber auch so verfahren: Es ist nach den Gleichungen (6) und (10) von pag. 455, 456

$$t = \int \frac{dv}{\sqrt{V}} = \frac{C}{A - B} \int \frac{dr}{pq} = \frac{C'}{A' - B'} \int \frac{dr'}{p'q'}. \tag{6}$$

Nun ergiebt sich der Wert von $i\omega'$ für die eine und die andere Kreiselbewegung, wenn wir als untere Grenze des betreffenden Integrales t denjenigen Wert von r bez. r', für welchen $q = 0$ bez. $q' = 0$ ist, und als obere Grenze den Wert $r = \infty$ bez. $r' = \infty$ nehmen. Die beiden so entstehenden Integrale sind aber nach der vorstehenden Gleichung identisch, da sich die genannten oberen und unteren Grenzen vermöge der Beziehung $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ entsprechen.

Anders liegt die Sache für die Konstanten s der beiden Bewegungen, die wir als s und s' unterscheiden. Es war

$$is = \int_e^1 \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Führen wir wie in (6) die Integrationsvariable r ein, so wird

$$is = \frac{C}{A - B} \int \frac{dr}{pq}, \tag{7}$$

wo die untere Grenze derjenige Wert von r ist, für den q verschwindet, die obere der Wert $r = \frac{G}{C}$. In entsprechender Weise ist is' zu definieren:

$$is' = \frac{C'}{A' - B'} \int \frac{dr'}{p'q'}, \tag{7'}$$

wobei als untere Grenze derjenige Wert von r' zu denken ist, für den q' verschwindet, als obere Grenze der Wert $r' = \frac{G'}{C'}$. In den Integralen

(7) und (7′) sind also nur die unteren Grenzen entsprechende Werte; die oberen Grenzen sind durchaus verschieden; *mithin werden auch die Konstanten s und s′ verschieden ausfallen.*

Wir betrachten endlich die Konstanten l und l'. Da die einzelne Poinsot-Bewegung von vier Willkürlichkeiten abhängt und da die konjugierte Poinsot-Bewegung durch die ursprüngliche vollständig mitbestimmt ist, wird es möglich sein, die Konstanten l und l' einzeln durch ω, ω', s und s' auszudrücken. Wir erreichen dieses folgendermafsen. Nach den Gleichungen (5) von pag. 43 haben wir

$$p + iq = 2i\left(\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right)$$

für die eine der beiden konjugierten Bewegungen. Bedeuten α', β', γ', δ' die nach dem Schema der Gleichungen (32) gebildeten Werte der α, β, γ, δ für die andere Bewegung, so gilt gleichzeitig:

$$p' + iq' = 2i\left(\beta'\frac{d\delta'}{dt} - \delta'\frac{d\beta'}{dt}\right).$$

Die Beziehung zwischen den beiden konjugierten Polhodiekurven liefert daher

$$\left(\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right) = -\left(\beta'\frac{d\delta'}{dt} - \delta'\frac{d\beta'}{dt}\right)$$

oder

$$\beta\delta\left(\frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right) = -\beta'\delta'\left(\frac{d\log\delta'}{dt} - \frac{d\log\beta'}{dt}\right).$$

In dieser Gleichung setzen wir für t die speziellen Werte $t = -is'$ und $t = -is$ ein. Im ersten Falle verschwindet l', im zweiten Falle l aus unserer Gleichung, so dafs wir im ersten Falle l, im zweiten l' getrennt erhalten. *Für l ergiebt sich so der folgende Wert:*

$$(8)\quad \begin{cases} 2il + \dfrac{i\pi}{2\omega} = \dfrac{\Theta'(-is - is' + 2i\omega')}{\Theta(-is - is' + 2i\omega')} - \dfrac{\Theta'(is - is')}{\Theta(is - is')} \\ -e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(is - is')}\dfrac{\Theta'(0)\,\Theta(2i\omega' - 2is)}{\Theta(is - is')\,\Theta(-is - is' + 2i\omega')}\dfrac{\Theta(i\omega' - is')\,\Theta(i\omega' + is')}{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}. \end{cases}$$

Der entsprechende Wert von l′ folgt durch Vertauschung von s und s′.

Um die rechte Seite zu vereinfachen, denken wir vorübergehend die Gröfse $-is'$ als variabel und fragen nach den Unendlichkeitsstellen der rechts stehenden Ausdrücke in dieser Variabeln, die wir mit t' bezeichnen wollen.

Der erste Term wird ersichtlich unendlich grofs für die Werte

$$(\mathrm{I})\qquad t' = is - 2i\omega' + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar allemal mit dem Residuum $+1$. Ebenso wird der zweite Term unendlich für

$$(\mathrm{II})\qquad t' = -is + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar mit dem Residuum -1. Der dritte Term wird an allen den genannten Stellen (I) und (II) und nur an diesen ebenfalls unendlich. Um die Residuen zu berechnen, bemerken wir (1), dafs für $t' = is - 2i\omega'$, sowie für $t' = -is$ das Residuum -1 beträgt, und (2), dafs unser dritter Term bei Vermehrung von t' um 2ω bez. um $4i\omega'$ den Faktor -1 bez. $+1$ aufnimmt. Hiernach wird das Residuum dieses dritten Termes an den Stellen (I) und (II) allgemein gleich $(-1)^{m+1}$ sein. Es werden daher die Unendlichkeitsstellen des ersten Termes bei geradem, die des zweiten Termes bei ungeradem m durch das Unendlichwerden des dritten Termes aufgehoben. Mithin bleiben nur die folgenden Unendlichkeitsstellen bestehen:

(I′) $t' = is + 2\omega + 2i\omega' + 4m\omega + 4m'i\omega'$, (Residuum $+2$),
(II′) $t' = -is \qquad\quad + 4m\omega + 4m'i\omega'$, (Residuum -2).

Dies ist eine Anordnung von Unendlichkeitsstellen, wie sie einer in t' doppeltperiodischen Funktion von den Perioden 4ω und $4i\omega'$ entspricht. In der That bleibt auch die rechte Seite von (8) bei Vermehrung von t' um 4ω und $4i\omega'$ gänzlich ungeändert.

Wir können nun leicht die fragliche doppeltperiodische Funktion durch ϑ-Funktionen von der Periode 2ω und $2i\omega'$ ausdrücken. Betrachten wir nämlich

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)} - \frac{\vartheta'\left(\frac{t' + is}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' + is}{2}\right)}.$$

Diese Gröfse hat gerade, als Funktion von t' aufgefafst, die Unendlichkeitsstellen (I′) und (II′) mit den richtigen Residuen und ist doppeltperiodisch von den Perioden 4ω, $4i\omega'$. Sie kann sich daher von der rechten Seite der Gleichung (8) nur um eine additive Konstante c, d. h. um eine von t' unabhängige Gröfse unterscheiden, welche man durch Einsetzen eines speziellen Wertes (z. B. $t' = -i\omega'$) bestimmt; und zwar findet man so $c = -\frac{i\pi}{\omega}$.

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$\frac{s' - s}{2} = \omega' - a, \quad \frac{s' + s}{2} = b, \tag{9}$$

setzen also

$$s = -\omega' + a + b, \quad s' = \omega' - a + b; \tag{9′}$$

dann können wir den zuletzt ermittelten Wert von $2il$ *folgendermafsen schreiben:*

$$2il + \frac{3i\pi}{2\omega} = \frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}. \tag{10}$$

Der entsprechende Wert von l' ergiebt sich, wie erwähnt, wenn wir in (8) s mit s' vertauschen. *Man erhält dadurch*

$$(10') \qquad 2il' + \frac{3i\pi}{2\omega} = -\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}.$$

Wir merken noch die aus (10) und (10′) folgenden Formeln an:

$$(11) \qquad \begin{cases} i(l + l') = -\dfrac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} - \dfrac{3i\pi}{2\omega}, \\ i(l - l') = \dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}. \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen den Konstanten s, s', l, l' ist damit gefunden.

Wir können uns nun auf den Standpunkt stellen, dafs es, gewissermafsen aus Symmetriegründen, praktischer wäre, die einzelne Poinsot-Bewegung statt durch die Gröfsen ω, ω', s und l lieber durch die vier Gröfsen ω, ω', s und s' oder auch durch die Gröfsen ω, ω', a und b festzulegen, indem wir die konjugierte Poinsot-Bewegung mit in Betracht ziehen.

In diesen Konstanten wollen wir uns insbesondere die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen (41), (42) der *Herpolhodiekurve* noch einmal hinschreiben. Dieselben lauten, wenn wir sogleich einige Reduktionen anbringen:

$$\pi + i\varkappa = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\, e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}}\, e^{\left\{\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}\right\} t}\, \frac{\vartheta(t - \omega - i\omega' + ia + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$-\varrho = i\left(\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} + \frac{\vartheta'(\omega + ia + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\right).$$

Dies sind aber genau die Formeln für die Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels, wie wir sie pag. 436, 437 aufgestellt haben, mit dem einzigen Unterschiede, dafs bei unseren jetzigen Formeln der Faktor $-\frac{1}{2}$ hinzugetreten ist.

Schreiben wir uns in gleicher Weise die Gleichungen der Herpolhodiekurve des konjugierten Kreisels hin, so bekommen wir Formeln, die sich von den vorhergehenden nur durch Vertauschung von $+a$ mit $-a$ unterscheiden; so entstehen aber gerade unsere früheren Gleichungen der Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels, mit dem Unterschiede, dafs jetzt der Faktor $+\frac{1}{2}$ gegen früher hinzugetreten ist.

Wir haben also das merkwürdige Resultat:

Die Koordinaten der Herpolhodiekurven unserer beiden konjugierten Kreisel von den Konstanten ω, ω', a und b sind in jedem Zeitmomente

identisch mit den durch -2 resp. $+2$ dividierten Koordinaten der Polhodie- resp. Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels von denselben Konstanten.

Hier liegt offenbar ein tieferer Zusammenhang zwischen unseren konjugierten Poinsot-Bewegungen und der Bewegung des schweren Kugelkreisels verborgen, den wir durch die folgenden Überlegungen aufzuklären beabsichtigen.

Wir denken uns die beiden konjugierten Kreisel um den gemeinsamen Punkt O bei zusammenfallender Axe des Impulses und gemeinsamer Anfangslage rotieren und fragen nach der Relativbewegung der beiden zugehörigen umgekehrten Bewegungen, d. h. derjenigen beiden Bewegungen, welche der umgebende Raum einem Beobachter auszuführen scheint, der seinen Standpunkt das eine Mal auf dem einen, das andere Mal auf dem andern der beiden konjugierten Kreisel nimmt.

Die beiden ursprünglichen direkten Bewegungen veranschaulichen wir uns nach der Vorschrift Poinsots, indem wir den betreffenden Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel ohne Gleitung abrollen lassen. Die umgekehrten (inversen) Bewegungen erhalten wir hieraus in der Weise, dafs wir umgekehrt die Polhodiekegel festhalten und die Herpolhodiekegel auf ihnen ohne Gleitung abwickeln. Die Relativbewegung der beiden Herpolhodiekegel stellt uns dann das Poinsotsche Bild der Relativbewegung der umgekehrten Poinsot-Bewegungen dar.

Nun besitzen aber nach Definition konjugierte Kreisel diametral gelegene Polhodiekurven und folglich kongruente Polhodiekegel. In unserem Falle rollen also die beiden Herpolhodiekegel auf einem und demselben Polhodiekegel. Und zwar berühren sie diesen beständig längs einer und derselben Erzeugenden, welche durch die jeweiligen Werte der Verhältnisse $p : q : r = p' : q' : r'$ gegeben ist, und drehen sich um diese mit ein und derselben Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$$

im entgegengesetzten Sinne. (Wir haben uns vorzustellen, dafs der eine Herpolhodiekegel den Polhodiekegel von innen, der andere von aufsen berührt, so dafs sie bei ihrer im entgegengesetzten Sinne stattfindenden Drehung beständig in Kontakt bleiben können.) Wenn aber zwei Kegel ohne zu gleiten auf einem dritten abrollen und dabei dauernd in Kontakt bleiben, so rollen sie auch ohne Gleitung aufeinander ab. Wir können somit, um die fragliche Relativbewegung zu erhalten, den Polhodiekegel ganz ausschalten und direkt den einen Herpolhodiekegel auf dem anderen abwickeln. Auf diese Weise gewinnen wir aus dem Poinsotschen Bilde der ursprünglichen Kreiselbewegungen zugleich das Poinsotsche Bild der oben genannten Relativbewegung.

Halten wir nach Belieben einen der beiden Herpolhodiekegel fest, so spielt dieser für die Relativbewegung die Rolle des Herpolhodiekegels, während der andere Herpolhodiekegel als Polhodiekegel der Relativbewegung zu bezeichnen sein würde. Wir sehen also:

Herpolhodie- und Polhodiekegel unserer Relativbewegung sind mit den beiden Herpolhodiekegeln der ursprünglichen Einzelbewegungen identisch.

Etwas anders liegt die Sache, wenn wir aufser den Kegeln die auf ihnen verlaufenden Herpolhodie- und Polhodiekurven der Relativbewegung in Betracht ziehen. Diese sind nicht etwa ohne Weiteres mit den Herpolhodiekurven der konjugierten Poinsot-Bewegungen identisch. Denn erstens rollen ja diese letzteren Kurven auf den Polhodiekurven der Poinsot-Bewegungen ab, welche in Bezug auf O diametral liegen. Mithin müssen sich auch diejenigen beiden Punkte der Herpolhodiekurven, welche in jedem Momente den Endpunkt des Drehungsvektors in den Poinsot-Bewegungen geben, auf entgegengesetzten Seiten von O befinden. Um überhaupt zwei auf einander abrollende Kurven zu haben, müssen wir also die eine Herpolhodiekurve durch ihr diametrales Gegenbild in Bezug auf O ersetzen. Aber auch die so entstehenden beiden Kurven, die Herpolhodiekurve der einen und das diametrale Gegenbild der Herpolhodiekurve bei der anderen Poinsotbewegung, sind noch nicht direkt die Polhodie- und Herpolhodiekurve der Relativbewegung. Wir überzeugen uns nämlich leicht, dafs die Drehgeschwindigkeit des Polhodiekegels in der Relativbewegung doppelt so grofs ist wie die Drehgeschwindigkeit in den ursprünglichen Einzelbewegungen. In der That müssen wir den als Polhodiekegel fungierenden Kegel bei der Relativbewegung erst in die Lage des Polhodiekegels bei der Poinsot-Bewegung überdrehen, was durch die Drehung $(-pdt, -qdt, -rdt)$ geschieht und dann in die Lage des als Herpolhodiekegel dienenden Kegels, wozu die Drehung $(p'dt, q'dt, r'dt) = (-pdt, -qdt, -rdt)$ erforderlich ist. Die in der Zeit dt stattfindende Gesamtdrehung beträgt also bei der Relativbewegung $(-2pdt, -2qdt, -2rdt)$; die Winkelgeschwindigkeit ist daher bei richtiger Wahl des Vorzeichens $2\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, d. h. doppelt so grofs wie bei den ursprünglichen Poinsot-Bewegungen.

Nun erhalten wir die Herpolhodie- und Polhodiekurve, indem wir uns auf den betreffenden Kegeln in der Richtung der instantanen Drehaxe die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit abtragen. Wir kommen dabei ersichtlich zu Kurven, welche der Herpolhodiekurve der einen und dem diametralen Gegenbilde der Herpolhodiekurve der anderen unserer konjugierten Poinsot-Bewegungen geometrisch ähnlich und in dem doppelten Mafsstabe angefertigt sind. Es ergiebt sich so:

Die Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve unserer Relativbewegung entstehen aus den Koordinaten der Herpolhodiekurven der beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen, indem man diese mit $+2$ und -2 multipliziert.

Wir haben aber oben ausgerechnet, dafs die mit $+2$ und -2 multiplizierten Koordinaten der Herpolhodiekurven bei den Poinsot-Bewegungen genau übereinstimmen mit den Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels. Berücksichtigen wir noch, dafs eine Bewegung durch Angabe ihrer Herpolhodie- und Polhodiekurve völlig bestimmt ist, so gewinnen wir das merkwürdige Resultat:

Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Relativbewegung der zu zwei konjugierten Poinsot-Bewegungen gehörigen inversen Bewegungen.

Dies ist das eingangs erwähnte, berühmte Jacobische Theorem — allerdings in einer von der ursprünglichen Jacobischen nicht unwesentlich abweichenden Formulierung. Der Zusammenhang, welcher hier zwischen zwei verschiedenen Rotationsproblemen ausgesprochen wird, ist in der That ein überraschender und liegt keineswegs auf der Oberfläche der Dinge.

Um diesen Zusammenhang im Einzelnen noch deutlicher zu verstehen, können wir uns insbesondere fragen: *Was entspricht in den Poinsot-Bewegungen der Figurenaxe des Kugelkreisels, was der Vertikalen?* Die Antwort hierauf lautet einfach so: *Die Impulsaxe der einen Poinsot-Bewegung giebt die Figurenaxe, die der anderen die Vertikale.* Bemerken wir nämlich Folgendes: Die in Rede stehenden transcendenten Kegel sind sämtlich in dem Sinne periodisch, dafs sie, um eine gewisse Axe durch einen gewissen Winkel gedreht, mit sich zur Deckung kommen. Diese „Periodicitätsaxe“ ist nun bei dem Herpolhodiekegel der Poinsot-Bewegungen die im Raume feste Axe des Impulses, bei dem Polhodie- und Herpolhodiekegel der Kugelkreisel-Bewegung die Figurenaxe und die Vertikale. Da nun die Kegel wechselweise übereinstimmen, so werden auch ihre „Periodicitätsaxen“ zusammenfallen müssen. Die Axe des Impulses der einen Poinsot-Bewegung ist also mit der Vertikalen, die der anderen mit der Figurenaxe des Kugelkreisels identisch.

Aus dem Jacobischen Theorem ergiebt sich weiterhin eine merkwürdig einfache Konstruktion für die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Wir denken uns die Trägheitsellipsoide der beiden konjugierten Kreisel konstruiert und so gestellt, dafs ihre Hauptaxen zusammenfallen. Projizieren wir die Schnittkurve dieser beiden Ellipsoide von O aus, so erhalten wir den ge-

meinsamen Polhodiekegel der konjugierten Kreisel. Darauf konstruieren wir uns zu irgend einer Erzeugenden $p : q : r$ des Kegels die zugehörige Impulsaxe im einen und im anderen Kreisel, d. h. die Geraden $Ap : Bq : Cr$ und $A'p : B'q : C'r'$. Rein geometrisch finden wir diese Geraden, indem wir in den Durchstofsungspunkten der Erzeugenden mit den Trägheitsellipsoiden die Tangentialebenen legen und von O aus auf diese die Lote fällen. Diese beiden Lote geben dann direkt die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des Kugelkreisels an. Ihr Neigungscosinus wird, wie man sieht, einfach gleich

$$\frac{AA'p^2 + BB'q^2 + CC'r^2}{GG'}. \quad —$$

Zum Überflufs wollen wir noch einen zweiten Beweis geben. *Wir wollen nämlich jetzt noch das Jacobische Theorem an den Zusammensetzungsformeln der α, β, γ, δ verifizieren.*

Unsere beiden Poinsot-Bewegungen seien wie früher durch die Parameter α, β, γ, δ und α', β', γ', δ' bestimmt. Die zugehörigen umgekehrten Bewegungen des Raumes sind dann nach pag. 30 durch die folgenden Parameterwerte

$$\delta, \ -\beta, \ -\gamma, \ \alpha \quad \text{und} \quad \delta', \ -\beta', \ -\gamma', \ \alpha'$$

bestimmt. Die Relativbewegung unserer beiden konjugierten Kreisel, d. h. diejenige Drehung, welche den einen Kreisel aus seiner Lage zur Zeit t in die Lage des anderen Kreisels überführt, erhalten wir aber dadurch, dafs wir (1) den einen der beiden Kreisel aus seiner Lage zur Zeit t in seine Anfangslage zurückbringen und (2) aus dieser in die Lage des anderen Kreisels überdrehen. Ebenso ergiebt sich die Relativbewegung der beiden umgekehrten Bewegungen dadurch, dafs wir (1) die eine der beiden umgekehrten Bewegungen, sagen wir die durch δ', $-\beta'$, $-\gamma'$, α' gegebene rückgängig machen, was durch eine Drehung von den Parametern α', β', γ', δ' geschieht und sodann die andere umgekehrte Bewegung δ, $-\beta$, $-\gamma$, α ausführen. Wir haben also, um die Relativbewegung der umgekehrten Bewegungen zu erhalten, die folgenden beiden Drehungen nach einander auszuführen:

$$(1) \ \alpha', \ \beta', \ \gamma', \ \delta' \quad \text{und} \quad (2) \ \delta, \ -\beta, \ -\gamma, \ \alpha.$$

Nach den Zusammensetzungsformeln von pag. 32 hat nun die resultierende Drehung, welche in ihrer Wirkung der Aufeinanderfolge der Drehungen (1) und (2) gleichkommt, die folgenden Parameter:

$$\alpha'' = \alpha'\delta - \beta'\gamma, \quad \beta'' = -\alpha'\beta + \beta'\alpha$$
$$\gamma'' = \gamma'\delta - \delta'\gamma, \quad \delta'' = -\gamma'\beta + \delta'\alpha.$$

Wir wollen zeigen, dafs dieses in der That die Parameter des Kugelkreisels sind.

Zu dem Zwecke haben wir für α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' ihre Ausdrücke in den Θ-Funktionen bei Zugrundelegung der Konstanten ω, ω', s und s' bez. ω, ω', a und b einzutragen und haben abermals von den Θ- zu den ϑ-Funktionen überzugehen. Dabei brauchen wir nur beispielsweise α'' und β'' zu berechnen, da sich die beiden anderen Parameter aus diesen durch Vertauschung von $+i$ und $-i$ herleiten lassen.

Für α'' erhalten wir nach den Gleichungen (32) von pag. 468 folgende Darstellung:

$$\alpha'' = \sqrt{CC'}\, e^{i(l'-l)t}\, \frac{\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+2i\omega'-is) + e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-2i\omega'+is'+is)}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Hier stimmt zunächst der Exponentialfaktor mit demjenigen Exponentialfaktor überein, welcher bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels in dem Ausdrucke von α auftrat. In der That haben wir nach Gleichung (11)

$$e^{i(l'-l)t} = e^{-\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)}t}.$$

Ferner rechnet man leicht nach, dafs unser Θ-Quotient bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. die Faktoren $+1$ und

$$e^{-\frac{i\pi}{\omega}\frac{is'-is}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(i\omega'-ia)}$$

aufnimmt. Dies sind aber dieselben Faktoren, mit denen sich bei denselben Vermehrungen der ϑ-Quotient

$$\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}$$

multipliziert. Da auch die Unendlichkeitsstellen in der t-Ebene übereinstimmen, mufs unser obiger Ausdruck bis auf eine Konstante diesem ϑ-Quotienten gleich sein. Eben dieser ϑ-Quotient trat aber auch in dem Ausdruck des Parameters α bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels auf. Dafs schliefslich auch die multiplizierenden Konstanten in den beiden verglichenen Ausdrücken übereinstimmen, wollen wir ohne Beweis erwähnen.

Was sodann den Wert von β'' betrifft, so haben wir

$$\beta'' = \sqrt{CC'}\, e^{i\left(l+l'+\frac{\pi}{2\omega}\right)t}$$

$$\cdot\, \frac{-e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is)}\,\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+is) + e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is')}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Wiederum ändert sich der rechts stehende Bruch nur um gewisse konstante Faktoren, wenn wir eine der Perioden zu t hinzufügen, nämlich um die Faktoren $+1$ bez.

$$-e^{-\frac{i\pi}{\omega}\left(-i\omega'+\frac{is+is'}{2}\right)}=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(-\omega+ib-i\omega')}.$$

Dieselben Faktoren nimmt aber auch der folgende ϑ-Quotient auf.

$$\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')}=-e^{\frac{i\pi t}{\omega}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Mithin wird β'' unter Berücksichtigung der Gleichungen (11) dem nachstehenden Ausdrucke proportional werden:

$$e^{i\left(l+l'+\frac{3\pi}{2\omega}\right)t}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}=e^{-\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dies ist aber der variable Bestandteil des Wertes von β bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Endlich stimmt auch der konstante Proportionalitätsfaktor überein, was wir jedoch nicht ausdrücklich beweisen wollen.

Somit ist die Identität der Parameter α'', β'', γ'', δ'' unserer Relativbewegung mit den Parametern α, β, γ, δ des schweren Kugelkreisels dargethan, worin ein abermaliger und zwar der denkbar direkteste Beweis des Jacobischen Theorems liegt. —

Die hier gegebene Formulierung des Jacobischen Theorems ist, wie erwähnt, von der ursprünglichen Jacobischen*) etwas verschieden. Jacobi zerlegt nämlich die einzelne Poinsot-Bewegung in einen periodischen und einen nicht-periodischen Bestandteil oder, wie wir vielleicht nach Analogie mit Früherem sagen dürfen, in einen Nutations- und einen Präcessions-Bestandteil. Der Präcessions-Bestandteil führt, für sich betrachtet, den Körper mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Impulsaxe herum und wird so eingerichtet, dafs der übrigbleibende Nutations-Bestandteil eine rein periodische in sich zurücklaufende Bewegung darstellt. Die Präcessionsgeschwindigkeit wird dabei im Wesentlichen durch die Konstante l, die Nutationsbewegung durch die in der Darstellung der Poinsot-Bewegung auftretenden ϑ-Quotienten gegeben. Jacobi denkt sich nun den Präcessions-Bestandteil dadurch herausgeschafft, dafs er die Bewegung auf ein im Raume bewegliches Axenkreuz xyz bezieht, welches mit der Präcessionsgeschwindigkeit l um die (mit der Impulsaxe zusammenfallende) z-Axe gleichförmig rotiert. An diesem Axenkreuz gemessen ist die Bewegung eine reine, periodisch wiederkehrende Nutation. Indem Jacobi gleicher Weise die konjugierte Poinsot-Bewegung von ihrem Präcessions-Bestandteil befreit, fragt er

*) Ges. Werke Bd. II pag. 480.

nach der Relativbewegung der beiden konjugierten Nutationen und findet, dafs diese mit der Nutationsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels identisch ist. (Jacobi kann hier den symmetrischen Kreisel an Stelle des Kugelkreisels setzen, da die Bewegungen beider, wie wir wissen, sich, kurz gesagt (vgl. pag. 234), nur um einen Exponentialfaktor unterscheiden, d. h. nur in ihrem Präcessions-Bestandteile verschieden, in ihrem Nutations-Bestandteile dagegen gleich sind.) Offenbar ist unsere Formulierung des Jacobischen Theorems einfacher und weitergehend als die Jacobische, da sie Nutation und Präcession gleichzeitig berücksichtigt. Wir wollen den Satz, wie wir ihn oben ausgesprochen haben, kurz „das vervollständigte Jacobische Theorem“ nennen.

Auch im Beweise sind wir erheblich von Jacobi abgewichen. Jacobi beschreibt die Lage des XYZ- gegen das xyz-System in den beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen durch die neun Richtungscosinusse $a, \ldots c''$, d. h. durch die Koeffizienten derjenigen ternären Substitution, welche die Koordinaten XYZ in die xyz überführt. Bei der Aufsuchung der Relativbewegung mufs er daher *zwei ternäre* Substitutionen zusammensetzen und die $3 \times 3 = 9$ Koeffizienten der resultierenden Substitution berechnen. Demgegenüber besteht die Vereinfachung bei dem von uns zuletzt gegebenen Beweise darin, dafs wir statt der ternären *zwei binäre* Substitutionen zusammensetzten und nur die $2 \times 2 = 4$ Koeffizienten der resultierenden Drehung nötig hatten. Übrigens ist der Beweis von Jacobi selbst in seinen hinterlassenen Papieren nur angedeutet; er wurde erst nach seinem Tode von Lottner*) ausgeführt.

Die Möglichkeit, das Jacobische Theorem in dem hier gemeinten Sinne zu vervollständigen, d. h. die konjugierten Poinsot-Bewegungen direkt ohne vorherige Absonderung der Präcessions-Bestandteile zusammenzusetzen, ist wohl zuerst von Halphen**) bemerkt worden.

Einen sehr einfachen elementaren Beweis giebt Hr. Darboux***) von dem Jacobischen Theorem. Darboux fragt geradezu nach der Kraft, welche zur kinetischen Realisierung unserer Relativbewegung erforderlich ist und findet, dafs diese mit der Schwerkraft identisch ist. Einen ähnlichen Gedankengang schlägt wenig später Herr Routh†) ein.

---

*) Vgl. Jacobis ges. Werke, Bd. II, pag. 510 u. ff.

**) Comptes Rendues, Bd. 100, pag. 1065—1068.

***) Journ. de Liouville 1885 in der pag. 234 cit. Arbeit; vgl. auch die Noten XVIII und XIX zum Cours de Mécanique von Despeyrous-Darboux Bd. II.

†) Quaterly Journal of Mathem. vol. XXIII 1888. On a theorem of Jacobi in dynamics. Vgl. auch Bd. II der Rigid dynamics desselben Verf., art. 174, 175 und 206.

Auf die sonstigen Arbeiten, die sich mit dem Jacobischen Theorem befassen (Padova in den Atti d. Acad. di Torino, vol. XIX 1884 und Atti d. R. Istit. di Veneto, vol. III 1892; Halphen, Fonctions Elliptiques, Bd. II, Cap. 2 und 3, A. de Saint-Germain in der pag. 115 citierten Monographie) können wir hier nicht eingehen.

Zum Schlufs noch einige Bemerkungen über Zweck und Bedeutung des Jacobischen Theorems.

Wir haben in dieser Hinsicht vor allem zu betonen, *dafs dieses Theorem einen rein kinematischen Charakter hat.* In der That ist der Begriff der Relativbewegung lediglich ein kinematischer Begriff. Über die kinetische Realisierung einer Relativbewegung wissen wir von vornherein nichts. Sie wird im Allgemeinen unter ganz anderen Bedingungen erfolgen müssen, als diejenigen sind, unter denen die betreffenden Einzelbewegungen vor sich gehen. Dementsprechend kommt es beim Jacobischen Theorem gerade auf die kinematisch definierten Polhodie- und Herpolhodiekurven an, während die kinetisch wichtigeren Impulskurven bei unserem Beweise zurücktraten. Wir werden also sagen müssen: *Das Jacobische Theorem statuiert keinen mechanischen, sondern nur einen geometrischen Zusammenhang zwischen der Poinsot-Bewegung und der Bewegung des Kugelkreisels.*

Ferner kann man im Zweifel sein, ob die Poinsot-Bewegung wirklich so viel einfacher und übersichtlicher wie die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist, dafs es sich verlohnt, diese Bewegung auf jene zurückzuführen. Allerdings läfst sich die Poinsot-Bewegung bis zu einem gewissen Grade der Vollständigkeit durch elementare Mittel (durch Abrollen eines Ellipsoides auf einer Ebene) beschreiben. Indessen darf man den Gegensatz zwischen elementarer und transcendenter Abhängigkeit nicht überschätzen. Es kann sehr wohl sein, dafs eine in transcendenter Form gegebene Bewegung für die numerische Rechnung und für die Anschauung nicht komplizierter ist, wie eine algebraisch darstellbare.

Aber selbst wenn wir annehmen, dafs wir die einzelne Poinsot-Bewegung in all ihren Details völlig beherrschen, so besitzen wir deshalb noch keine klare Vorstellung von der Relativbewegung zweier solcher Bewegungen bez. der zugehörigen umgekehrten Bewegungen. In der That ist das Bild einer Relativbewegung in der Anschauung sehr schwer zu fassen. Es dürfte kaum möglich sein, ohne längere Entwickelungen von dem Jacobischen Theorem aus zu einer klaren Vorstellung beispielsweise von der Bahnkurve der Kreiselspitze, der Polhodie- und Herpolhodiekurve in der Bewegung des Kugelkreisels vorzudringen. Wir möchten uns deshalb der von Jacobi ausgesprochenen

Ansicht nicht anschliefsen, dafs man in der gleichzeitigen Betrachtung der konjugierten Poinsot-Bewegungen ein Mittel besitzt, um die Bewegung des schweren Kreisels wirklich von Grund aus zu verstehen.

Trotzdem ist der durch Jacobi erschlossene Zusammenhang zwischen Poinsot-Bewegung und Bewegung des Kugelkreisels in kinematischer Hinsicht so merkwürdig und interessant, dafs wir ihn hier nicht mit Stillschweigen übergehen konnten.

§ 9. Die Lagrangeschen Gleichungen für die α, β, γ, δ des schweren Kugelkreisels und ihre direkte Integration. Zusammenhang zwischen der Bewegung des Kugelkreisels und einem Probleme der Punktmechanik.

Nachdem sich im Vorhergehenden unsere Parameter α, β, γ, δ in mannigfacher Beziehung so ausgezeichnet bewährt haben, werden wir uns in diesem abschliefsenden Paragraphen fragen, ob wir ihnen nicht in der Theorie des schweren Kugelkreisels eine noch centralere Stellung dadurch verleihen können, dafs wir sie von vornherein bei der Aufstellung der Differentialgleichungen und deren Integration zu Grunde legen. Es hat ja etwas Unbefriedigendes, dafs wir diese Parameter erst gegen Ende der Theorie (in diesem Kapitel) ausgiebig gebraucht haben, während wir die ursprüngliche Integration mit den Eulerschen Winkeln φ, ψ, ϑ bewerkstelligten. Demgegenüber wollen wir nun zeigen, dafs die Differentialgleichungen der Bewegung des schweren Kugelkreisels, in den α, β, γ, δ geschrieben, eine überraschend einfache Gestalt annehmen und dafs sich das ganze Integrationsgeschäft bei konsequenter Benutzung unserer Parameter sehr viel eleganter und kürzer wie bei der früheren Methode gestaltet und mit einem Schlage zu der definitiven Darstellung der Bewegung durch ϑ-Quotienten führt.

Der Umstand, dafs wir diese Entwickelungen erst jetzt bringen, und dafs wir uns bisher mit schwerfälligeren analytischen Methoden begnügt haben, liegt lediglich in der Anordnung des Stoffes, nicht in der Natur der Sache begründet. Die folgenden Betrachtungen setzen nämlich einige Vorkenntnisse aus der Theorie der elliptischen Funktionen voraus, die erst in diesem Kapitel vorbereitet werden konnten. Nur aus diesem Grunde haben wir bisher auf die konsequente Verwertung der α, β, γ, δ verzichtet.

Noch nach anderer Richtung hin sind die folgenden Ausführungen bemerkenswert. Wir werden nämlich die Bewegung des schweren Kugelkreisels mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes im Raume von vier Dimensionen in Zusammenhang bringen, so wie wir sie im vorigen Paragraphen mit der kräftefreien Bewegung des unsymmetrischen

Kreisels verglichen haben. Dabei ist der hier gemeinte Zusammenhang ein durchgreifender, auch in kinetischer Hinsicht gültiger, während der von Jacobi entdeckte nur kinematischer Natur war.

Gleichzeitig werden wir Gelegenheit haben, einen Ausblick in eine eigentümliche, eventuell mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme im Sinne der Punktmechanik zu nehmen, für welche unsere Behandlung des Kugelkreisels ein vorzüglich einfaches Beispiel darbietet.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen des schweren Kugelkreisels. Es wurde bereits pag. 155 die wunderbare Thatsache betont, dafs die Form dieser Gleichungen für alle möglichen Koordinaten, durch welche wir die Lage eines mechanischen Systems beschreiben mögen, dieselbe bleibt. Die Bewegungsgleichungen leiten sich allemal aus dem Ausdrucke T der lebendigen Kraft und dem Ausdrucke dA der Arbeit bei einer unendlich kleinen Verrückung (bez. aus der potentiellen Energie V) nach ein und derselben Regel ab. Wie pag. 158 erwähnt, bleibt das Lagrangesche Schema sogar im Wesentlichen bestehen, wenn man die Lage des Systems durch überzählige Koordinaten festlegt, d. h. durch Gröfsen, welche mittelst einer (oder mehrerer) Relationen $F = \text{const.}$ (bez. $F_1, F_2, \ldots = \text{const.}$) verknüpft sind. Man hat dann nur statt T den Ausdruck $T + \lambda F$ (bez. $T + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots$) zu benutzen, wo die „Lagrangeschen Multiplikatoren“ λ so zu bestimmen sind, dafs die Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen verträglich werden.

Diese Regel wollen wir jetzt benutzen, um die Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den α, β, γ, δ, auf welche schon pag. 158 hingewiesen wurde, anzuschreiben. Verstehen wir unter $[\mathsf{A}]$, $[\mathsf{B}]$, $[\Gamma]$, $[\Delta]$ die Komponenten des Impulses, unter A, B, Γ, Δ die Komponenten der äufseren Kraft, welche zu den Lagenkoordinaten α, β, γ, δ gehören, so haben wir ohne Weiteres:

$$(1)\quad \begin{cases} [\mathsf{A}] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \alpha'}, \quad [\mathsf{B}] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \beta'}, \quad [\Gamma] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \gamma'}, \quad [\Delta] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \delta'}, \\ \mathsf{A} = -\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, \qquad \mathsf{B} = -\dfrac{\partial V}{\partial \beta}, \qquad \Gamma = -\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}, \qquad \Delta = -\dfrac{\partial V}{\partial \delta}. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \alpha} = \mathsf{A}, \\ \dfrac{d[\mathsf{B}]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \beta} = \mathsf{B}, \\ \dfrac{d[\Gamma]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \gamma} = \Gamma, \\ \dfrac{d[\Delta]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \delta} = \Delta, \end{cases}$$

Die Bedeutung der hier benutzten Gröfsen ist folgende: Zunächst lautet die Bedingungsgleichung, welche die α, β, γ, δ verknüpft, wie wir wissen,

$$F = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3}$$

Sodann ist die potentielle Energie $V = P\cos\vartheta$. Da nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 $\cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma$, so haben wir, in den α, β, γ, δ geschrieben,

$$V = P(\alpha\delta + \beta\gamma). \tag{4}$$

Bei der Berechnung der kinetischen Energie T des Kugelkreisels gehen wir von dem Ausdrucke

$$T = \frac{A}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$$

aus, wollen aber, um Zweideutigkeiten in der Bezeichnung zu vermeiden, im Folgenden statt A lieber $\frac{M}{2}$ schreiben. Benutzen wir für $p + iq$, $-p + iq$, r die Werte aus den Gleichungen (5) von pag. 43, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} T &= M\{(\beta\delta' - \delta\beta')(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') - (\gamma\beta' - \alpha\delta')(\delta\alpha' - \beta\gamma')\}, \\ &= M\{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung $F = 1$ gewinnen wir also den aufserordentlich einfachen Wert:

$$T = M(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'). \tag{5}$$

Wegen der angegebenen Werte von F, V und T gehen die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden über:

$$\begin{cases} [\mathsf{A}] = M\delta', & [\mathsf{B}] = -M\gamma', & [\Gamma] = -M\beta', & [\Delta] = M\alpha', \\ \mathsf{A} = -P\delta, & \mathsf{B} = -P\gamma, & \Gamma = -P\beta, & \Delta = -P\alpha, \\ \frac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \lambda\delta = \mathsf{A}, & \frac{d[\mathsf{B}]}{dt} + \lambda\gamma = \mathsf{B}, & \frac{d[\Gamma]}{dt} + \lambda\beta = \Gamma, & \frac{d[\Delta]}{dt} - \lambda\alpha = \Delta. \end{cases} \tag{6}$$

Eliminieren wir aus (6) die Impuls- und Kraftkomponenten, so haben wir, indem wir die Gleichungen in der umgekehrten Reihenfolge schreiben:

$$\begin{cases} M\alpha'' - \lambda\alpha = -P\alpha, \\ M\beta'' - \lambda\beta = +P\beta, \\ M\gamma'' - \lambda\gamma = +P\gamma, \\ M\delta'' - \lambda\delta = -P\delta. \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{7}$$

Dies sind die überaus einfachen und symmetrischen Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den α, β, γ, δ.

Wir kommen später auf diese Differentialgleichungen ausführlich zurück. Zunächst wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und die vorstehenden Gleichungen in ihren reellen und imaginären Teil auflösen, indem wir von den α, β, γ, δ zu den Quaternionengrößen A, B, C, D übergehen. Da nach pag. 21

$$\alpha = D + iC, \quad \beta = -B + iA,$$
$$\gamma = B + iA, \quad \delta = \quad D - iC,$$

so ergiebt sich:

$$(8) \quad \begin{cases} MA'' - \lambda A = +PA, \\ MB'' - \lambda B = +PB, \\ MC'' - \lambda C = -PC, \\ MD'' - \lambda D = -PD, \end{cases} \qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Die somit erhaltenen *Lagrangeschen Differentialgleichungen des schweren Kugelkreisels in den A, B, C, D* sind, wie man sieht, in ihrer Bauart von den vorhergehenden Gleichungen nicht verschieden; nur die Form der Bedingungsgleichung erscheint geändert.

Diese Gleichungen legen nun eine Deutung der Kreiselbewegung im Sinne der Punktmechanik des vierdimensionalen Raumes außerordentlich nahe.

Wir wollen die ihrer Definition nach reellen Größen A, B, C, D als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten im Raume von vier Dimensionen auffassen und zwar denken wir an einen vierdimensionalen Raum, der die genaue Verallgemeinerung unseres gewöhnlichen Euklidischen dreidimensionalen Raumes bildet. Wir werden also insbesondere in unserem vierdimensionalen Raume den Pythagoräischen Lehrsatz zur Anwendung bringen und dementsprechend die Entfernung zweier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2 durch den Ausdruck messen:

$$\sqrt{(A_2 - A_1)^2 + (B_2 - B_1)^2 + (C_2 - C_1)^2 + (D_2 - D_1)^2}.$$

In diesem Raume soll nun die „Bewegung“ eines Punktes von der Masse M untersucht werden; das Quadrat der Geschwindigkeit dieses Punktes werden wir nach dem eben Gesagten gleich

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

setzen; seine kinetische Energie wird mithin sein:

$$(9) \qquad T = \frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$

Ferner wollen wir annehmen, daß unser Punkt einer äußeren Kraft unterliegt, deren potentielle Energie an der Stelle A, B, C, D des vierdimensionalen Raumes gleich ist:

$$V = \frac{P}{2}(-A^2 - B^2 + C^2 + D^2). \tag{10}$$

Endlich soll der Punkt gezwungen sein, auf der um den Koordinatenanfang geschlagenen „Einheitskugel" zu verbleiben, d. h. sein Abstand vom Koordinatenanfang soll beständig gleich 1 sein. Dies bedeutet zufolge unserer obigen Festsetzung über das Mafs der Entfernungen im vierdimensionalen Raume, dafs beständig die Bedingungsgleichung erfüllt sein soll

$$F = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1. \tag{11}$$

Unter der „Bewegung" des Punktes im Raume von vier Dimensionen verstehen wir dabei nichts anderes als den Inbegriff solcher Koordinatenänderungen, welche den um eine Zeile vermehrten Differentialgleichungen für die Bewegung des Punktes im Raume von drei Dimensionen genügen.

Das vierdimensionale Bewegungsproblem, welches hierdurch definiert ist, können wir kurz bezeichnen als *die Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einfluſs des durch* (10) *charakterisierten Kraftsystems.**)

Bilden wir nun die Differentialgleichungen dieses sphärischen Pendels etwa nach Analogie mit den bekannten Lagrangeschen Gleichungen erster Art im Falle der dreidimensionalen Punktmechanik, so ergeben sich genau die Gleichungen (8). Wir können also sagen:

Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einfluſs des vorher angegebenen Kraftsystems.

Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir den Punkt der vierdimensionalen Kugel, dessen rechtwinklige Koordinaten jeweils gleich den Quaternionenparametern des Kugelkreisels sind, den *Repräsentanten* der Kreiselbewegung nennen und wollen uns von der

*) Das *genaue Analogon* des dreidimensionalen sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen wäre offenbar die Bewegung eines Massenpunktes auf der Einheitskugel in einem Kraftfelde, dessen potentielle Energie einer der Koordinaten A, B, C, D proportional ist oder, etwas allgemeiner, nur von einer dieser Koordinaten abhängt. Die Niveauflächen dieses Kraftfeldes bestehen aus einem System paralleler (dreifach ausgedehnter) „Ebenen" des vierdimensionalen Raumes, ebenso wie die Niveauflächen der Schwere im Raume von drei Dimensionen aus dem Systeme der sämtlichen Horizontalebenen bestehen, während die Niveauflächen unseres Kraftfeldes (10) ein System von Flächen zweiten Grades darstellen.

Natürlich ist dieser, dem sphärischen Pendel im engeren Sinne analoge Kreisel integrabel. Er gehört in der von Herrn Liebmann (Math. Ann. Bd. 50, pag. 65) gegebenen Liste zu dem als reell hervorgehobenen Falle (5), bei welchem

$$V = f(\beta - \gamma) = f(2B)$$

vorausgesetzt wird.

Bewegung dieses Repräsentanten ein möglichst klares Bild zu verschaffen suchen. Dabei handelt es sich in erster Linie darum, die uns von früher her bekannten Bewegungsgesetze des Kreisels, die Impulssätze $n = \text{const}$, $N = \text{const}$ und den Satz der lebendigen Kraft als Eigenschaften der Bewegung des Repräsentanten umzudeuten. Diese Gesetze sollen hier von neuem auf Grund der Gleichungen (8) abgeleitet werden. Und zwar werden wir genau so verfahren, wie wir es bei der Behandlung des dreidimensionalen sphärischen Pendels auf Grund der in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z geschriebenen Lagrangeschen Gleichungen erster Art thun würden.

Wir multiplizieren zunächst die Gleichungen (8) der Reihe nach mit B, A, D, C und nehmen die Differenz der beiden ersten und der beiden letzten Gleichungen. So ergiebt sich:

$$M(A''B - B''A) = 0,$$
$$M(C''D - D''C) = 0.$$

Offenbar sind die linken Seiten vollständige Differentialquotienten nach der Zeit. Wir können daher integrieren und erhalten, wenn wir die Integrationskonstanten mit $\frac{n+N}{2}$ und $\frac{n-N}{2}$ bezeichnen:

$$(12) \qquad \begin{cases} M(A'B - B'A) = \frac{n+N}{2}, \\ M(C'D - D'C) = \frac{n-N}{2}. \end{cases}$$

Die Wahl der Konstantenbezeichnung deutet an, in welcher Weise diese Gleichungen mit unseren früheren Integralgleichungen $n = \text{const}$ und $N = \text{const}$ zusammenhängen. Um diese Gleichungen in Worte zu fassen, bemerken wir, dafs die linken Seiten den Inhalten gewisser infinitesimaler Dreiecke proportional sind. Es ist z. B. $\frac{1}{2}(A'B - B'A)dt$ gleich dem Inhalt des Dreiecks mit den Ecken 0, 0, 0, 0; A, B, 0, 0; $A + dA$; $B + dB$, 0, 0. Daraufhin überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Aussage:

Der Repräsentant des Kugelkreisels bewegt sich so, dafs der Radiusvektor vom Koordinatenanfang nach dem Projektionspunkt des Repräsentanten auf die (zweifach ausgedehnten) Ebenen $C = D = 0$ bez. $A = B = 0$ in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Unsere Impulssätze $n = \text{const}$ und $N = \text{const}$ sind hierdurch in engste Beziehung zu den Flächensätzen der gewöhnlichen Punktmechanik gebracht, wie denn auch die Ableitung der Gleichungen (12) mit der üblichen Ableitung der Flächensätze genau parallel lief.

Um sodann den Satz der lebendigen Kraft von Neuem zu gewinnen, multiplizieren wir die Gleichungen (8) der Reihe nach mit A', B', C', D' und addieren.

Berücksichtigen wir, dafs nach Gleichung (11)

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0 \tag{13}$$

ist, so ergiebt sich

$$M(A'A'' + B'B'' + C'C'' + D'D'') = P(AA' + BB' - CC' - DD').$$

Wiederum stehen rechts und links vollständige Differentialquotienten. Wir integrieren daher und finden, unter h die Integrationskonstante verstanden:

$$\frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = \frac{P}{2}(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) + h \tag{14}$$

oder, wenn wir die Abkürzungen aus den Gleichungen (9) und (10) benutzen

$$T + V = h.$$

Wir sind somit zum Satze der lebendigen Kraft gelangt und zwar genau durch denjenigen Prozefs, den man in der Mechanik des einzelnen Punktes bei Rechnungen mit rechtwinkligen Koordinaten anzuwenden gewöhnt ist. Um diesen Satz im Sinne der vierdimensionalen Punktmechanik zu deuten, berücksichtigen wir, dafs T dem Quadrat der Geschwindigkeit des Repräsentanten proportional ist; wir können dann etwa sagen:

Unser Repräsentant passiert bei seiner Bewegung die einzelne Niveaufläche $V = \text{const.}$ *stets mit der gleichen Geschwindigkeit, welche sich aus der Konstanten* h, *der Masse* M *und dem Werte des zu der betr. Niveaufläche gehörigen Potentiales* V *nach der letzten Formel leicht berechnen läfst.*

Schliefslich wollen wir noch die Gröfse des Lagrangeschen Multiplikators λ berechnen. Dieser giebt uns den „Druck“ an, welchen unser Massenpunkt auf die ihn führende Kugelfläche in radialer Richtung ausübt, oder, wenn wir wollen, die Spannung des von O auslaufenden Armes, an dessen Ende unser Massenpunkt befestigt ist. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die Gleichungen (8) der Reihe nach mit A, B, C, D und addieren. Dabei ergiebt sich wegen der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

$$\lambda = M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') - P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2).$$

Es ist aber nach Gleichung (13)

$$AA'' + BB'' + CC'' + DD'' = -(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2),$$

also mit Rücksicht auf (14)

$$M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') = -P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h.$$

Der angegebene Wert von λ reduziert sich daher auf

$$\lambda = -2P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h = 4V - 2h. \tag{15}$$

Dieses Ergebnis wollen wir folgendermafsen als Satz aussprechen:

Beim Durchgange durch die gleiche Niveaufläche $V = \text{const}$ *drückt der Repräsentant stets mit der gleichen Stärke* $\lambda = 4V - 2h$ *senkrecht gegen die ihn tragende Kugelfläche.*

Wir gehen nun dazu über, die oben angekündigte Revision unseres früheren Integrationsverfahrens zu geben. Wir werden geradezu, indem wir von den Differentialgleichungen der A, B, C, D bez. der α, β, γ, δ ausgehen, in gröfster Kürze eine vollständige und neue analytische Theorie der Kreiselbewegung entwickeln, ohne die früheren Resultate als bekannt vorauszusetzen.

Durch die Gleichungen (12)—(15) ist der Anfang des Integrationsprozesses in den Quaternionengröfsen A, B, C, D bereits gemacht. Zur Weiterführung benutzen wir die Hülfsgröfse

$$u = -A^2 - B^2 + C^2 + D^2 \tag{16}$$

und versuchen diese als Funktion von t auszudrücken. Hierzu dienen folgende Rechnungen.

Wir bilden

$$u' = 2(-AA' - BB' + CC' + DD')$$

und kombinieren diese Gleichung mit (13), wobei sich ergiebt:

$$\begin{cases} AA' + BB' = -\frac{u'}{4}, \\ CC' + DD' = +\frac{u'}{4}. \end{cases} \tag{17}$$

Darauf quadrieren und summieren wir die erste dieser Gleichungen und der Gleichungen (12) und finden:

$$(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2) = \frac{M^2 u'^2 + 4(n+N)^2}{16M^2}. \tag{18}$$

Ebenso folgt aus der zweiten der Gleichungen (17) und (12)

$$(C^2 + D^2)(C'^2 + D'^2) = \frac{M^2 u'^2 + 4(n-N)^2}{16M^2}. \tag{18'}$$

Ferner haben wir wegen der Definition von u und der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \frac{1-u}{2}, \\ C^2 + D^2 = \frac{1+u}{2}, \end{cases} \tag{19}$$

so dafs wir statt (18) auch schreiben können:

$$A'^2 + B'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n+N)^2}{8M^2(1-u)}$$

$$C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n-N)^2}{8M^2(1+u)}$$

und

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n^2+N^2) + 8nNu}{4M^2(1-u^2)}.$$

Mit diesem Werte gehen wir in die Gleichung der lebendigen Kraft hinein.

Wir erhalten dann:

$$u'^2 = U,$$

wo U folgende Bedeutung hat:

$$(20)\quad U = \frac{4}{M^2}\{2Mh(1-u^2) - (n^2+N^2+2nNu) - MPu(1-u^2)\};$$

hiernach bestimmt sich t durch das elliptische Integral

$$(21)\qquad t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die untere Grenze e des Integrals denken wir uns in einen der Wurzelwerte von $U=0$ gelegt. Die beiden anderen Wurzelwerte seien e' und e''. Wir führen sogleich die folgenden Bezeichnungen für einige charakteristische Werte von t ein:

$$(21')\quad \omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Kehren wir die in (21) enthaltene Beziehung zwischen t und u um, so ergiebt sich u als eine doppeltperiodische Funktion von t mit den Perioden 2ω und $2i\omega'$. Somit haben wir unsere früheren Entwickelungen den neuen Bezeichnungen angepafst.

Nunmehr gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen (7) für die α, β, γ, δ zurück, welche für das Folgende doch bequemer sind, wie die in den Quaternionengröfsen geschriebenen Gleichungen (8), wie sich später zeigen wird. Hier tragen wir den Wert von λ aus Gleichung (15) ein und denken uns u als doppeltperiodische Funktion von t berechnet. Wir erhalten so:

$$(22)\qquad \begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\frac{2P}{M}u(t) - \frac{2h-P}{M}\right)\alpha, \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} = \left(\frac{2P}{M}u(t) - \frac{2h+P}{M}\right)\beta, \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen für die beiden anderen Parameter γ und δ sind den angegebenen genau gleich.

Unser Problem hängt somit von der Lösung dieser *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* ab. Über solche Gleichungen mögen zunächst einige historische Notizen Platz finden.

Die vorstehenden Differentialgleichungen gehören zu einem Gleichungstypus, welcher in der Litteratur vielfach studiert worden ist. Wir bezeichnen sie als *Lamésche Gleichungen*, da sie Verallgemeinerungen derjenigen Differentialgleichungen darstellen, welche zuerst von Lamé bei einer Aufgabe der Wärmeleitung behandelt worden sind. Gegenüber den allgemeinsten Gleichungen, welche Lamés Namen tragen, sind unsere Differentialgleichungen durch die wichtige Eigenschaft ausgezeichnet, dafs ihre Integrale eindeutige Funktionen von t sind. Solche Gleichungen sind ganz besonders von Hermite und zwar gerade im Anschlufs an die Rotationsprobleme (s. unten) untersucht worden. Es ist daher berechtigt, diese Gleichungen allgemein mit Hermites Namen zu belegen und sie als den *Hermiteschen Fall der Laméschen Gleichungen* zu bezeichnen.

Aus der Form der Differentialgleichung kann man das Statthaben des Hermiteschen Falles nach allgemeinen Regeln folgendermafsen entscheiden. Man suche die singulären Stellen der Differentialgleichung — wir handeln zunächst von der Gleichung für α — d. h. diejenigen Punkte der t-Ebene auf, an denen in der Entwickelung der Integrale andere als ganzzahlige Potenzen vorkommen. Diese singulären Punkte sind in unserem Falle mit den Unendlichkeitsstellen des Koeffizienten von α identisch, welche keine anderen sind, wie die Unendlichkeitsstellen der Funktion $u(t)$, d. h. wie die Stellen

$$t = i\omega' + 2m\omega + 2m' i\omega'.$$

Darauf mache man eine Potenzentwickelung an einer dieser Stellen, z. B. an der Stelle $t = i\omega'$ und setze

$$\alpha = a_0 (t - i\omega')^{-n} + a_1 (t - i\omega')^{-n+1} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten der Entwickelung und der Exponent n aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Für $\frac{\alpha''}{\alpha}$ ergiebt sich dabei eine Reihe, welche mit dem Terme

$$\frac{n(n+1)}{(t - i\omega')^2}$$

beginnt. Desgleichen entwickele man den Koeffizienten von α in eine nach Potenzen von $t - i\omega'$ fortschreitende Reihe, welche mit der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz beginnen wird. Das erste Glied dieser Reihe werde mit

$$\frac{m}{(t - i\omega')^2}$$

bezeichnet, (m = „Multiplikator des Unendlichwerdens"). Alsdann bestimmt sich n aus der Gleichung

$$n(n+1) = m. \tag{23}$$

Sollen nun die Integrale unserer Differentialgleichung eindeutige Funktionen von t werden, so mufs offenbar n eine ganze Zahl sein. Die vorstehende Gleichung giebt uns daher, umgekehrt gelesen, eine Bedingung, welcher der Multiplikator m im Hermiteschen Falle genügen mufs. Wir sehen also:

Das Statthaben des Hermiteschen Falles läfst sich aus der Differentialgleichung heraus dadurch beurteilen, daſs man den Multiplikator m aufsucht, mit welchem der Koeffizient von α an der Stelle $t = i\omega'$ und an den äquivalenten Stellen unendlich wird. Dieser Multiplikator mufs die Form $n(n+1)$ haben, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Die eben genannte Bedingung ist hier nur als notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit der Integrale abgeleitet; dafs sie zugleich die hinreichende Bedingung dafür darstellt, ist auf Grund der Parallelogrammeinteilung der t-Ebene nicht schwer zu sehen, soll aber hier übergangen werden.

Wir überzeugen uns nun leicht, dafs unser Kriterium bei den Gleichungen (22) erfüllt ist. Wir betrachten zu dem Zwecke das Integral

$$t - i\omega' = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{U}};$$

substituieren wir $u = \frac{1}{v}$ und entwickeln $U^{-\frac{1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von v, so ergiebt sich nach Ausführung der Integration in erster Annäherung

$$t - i\omega' = -\sqrt{\frac{Mv}{P}} = -\sqrt{\frac{M}{Pu}},$$

also umgekehrt

$$u = \frac{M}{P} \frac{1}{(t - i\omega')^2}. \tag{24}$$

Führt man die Rechnung ein Glied weiter, so erhält man, wie wir des Späteren wegen hinzufügen, in derselben Weise:

$$u = \frac{M}{P} \frac{1}{(t - i\omega')^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{M} (t - i\omega')^2\right). \tag{24'}$$

Aus Gleichung (24) bestimmt sich der Multiplikator, von welchem oben die Rede war, unmittelbar. Wir haben einfach

$$m = \frac{2P}{M} \cdot \frac{M}{P} = 2;$$

aus Gleichung (23) folgt daher

$$n = 1.$$

Wir können hiernach sagen:

In den Gleichungen (22) *liegt wirklich der Hermitesche Fall der Laméschen Gleichung vor, und zwar das einfachste Vorkommnis desselben, der Unterfall* $n = 1$.

Die Integrale der Hermite-Laméschen Gleichung sind nun, zumal in dem einfachsten Falle $n = 1$, sofort hingeschrieben. Man überzeugt sich zunächst, dafs, da die Differentialgleichung bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ völlig ungeändert bleibt, auch ihre Integrale gegenüber Vermehrungen des Argumentes um Perioden ein sehr einfaches Verhalten zeigen müssen. Nennt man nämlich zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $z_1(t)$ und $z_2(t)$, so mufs sich $z_1(t + 2\omega)$, $z_1(t + 2i\omega')$ (und ebenso $z_2(t + 2\omega)$, $z_2(t + 2i\omega')$) aus z_1 und z_2 linear zusammensetzen lassen. Durch spezielle Auswahl der partikulären Lösungen z_1 und z_2 kann man sogar erreichen, dafs $z_1(t + 2\omega)$ und $z_1(t + 2i\omega')$ direkt mit $z_1(t)$ proportional wird, so dafs also

$$z_1(t + 2\omega) = \varrho\, z_1(t), \quad z_1(t + 2i\omega') = \sigma\, z_1(t)$$

wird. Entsprechend läfst sich die andere partikuläre Lösung z_2 wählen. Das Verhalten dieser Partikular-Lösungen gegenüber wiederholten Periodenzuwächsen ist hiernach klar.

Nun bezeichneten wir eindeutige Funktionen von t, welche sich bei Vermehrung des Arguments um Perioden in dieser Weise „multiplikativ“ verhalten, allgemein als elliptische Funktionen zweiter Art. Dieselben können, wie wir wissen, als Produkt eines Exponentialfaktors und eines ϑ-Quotienten dargestellt werden, wobei so viele ϑ-Funktionen im Zähler und Nenner auftreten, als der Grad der Funktion, d. h. die Anzahl der im einzelnen Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen beträgt. Diese Anzahl ist im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung überdies von vornherein bekannt. Wir sahen nämlich, dafs, wenn $m = n(n + 1)$ ist, eine und nur eine n-fache Unendlichkeitsstelle bei $t = i\omega'$ (und den äquivalenten Punkten) vorhanden war. Die aus dem Multiplikator m zu bestimmende Zahl n giebt also direkt den Grad der elliptischen Funktionen an. Wir gewinnen also das folgende Resultat:

Die Hermite-Lamésche Gleichung wird allgemein durch elliptische Funktionen zweiter Art n^{ten} *Grades integriert. In dem hier vorliegenden einfachsten Falle* $n = 1$ *reichen wir insbesondere mit elliptischen Funktionen zweiter Art ersten Grades aus.*

Wir bemerken ferner, dafs unsere Differentialgleichung bei Vertauschung von t mit $-t$ völlig ungeändert bleibt. Daraus folgt, dafs

zugleich mit $z(t)$ immer auch $z(-t)$ ein Integral der Differentialgleichung darstellt. Ist insbesondere $z(t)$ als eine der multiplikativen partikulären Lösungen gewählt, so ist auch $z(-t)$ eine multiplikative Lösung, welche im allgemeinen von $z(t)$ verschieden ist. *Wir können also die im Vorstehenden genannten Lösungen z_1 und z_2 bez. gleich setzen:*

$$z_1 = z(t), \quad z_2 = z(-t).$$

Im Übrigen fügen wir die selbstverständliche Bemerkung hinzu:

Die allgemeine Lösung ergiebt sich aus unsern Partikularlösungen in der Form

$$c_1 z(t) + c_2 z(-t), \tag{25}$$

wo c_1 und c_2 die willkürlichen Integrationskonstanten sind.

In unserem Falle $n = 1$ hat $z(t)$ die folgende einfache Form

$$z(t) = e^{\lambda t} \frac{\vartheta(t - t_1)}{\vartheta(t - i\omega')}, \tag{26}$$

wo die eingeführten Konstanten λ und t_1 aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Die folgende Rechnung, welche zu dieser Konstantenbestimmung dient, läfst gleichzeitig erkennen, dafs $z(t)$ bei richtiger Konstantenwahl der in Rede stehenden Differentialgleichung wirklich genügt, und liefert somit einen expliciten Beweis der sämtlichen vorhergehenden Bemerkungen.

Wir betrachten vorerst die Gröfse

$$\begin{cases} \dfrac{z''}{z} = \dfrac{d^2 \log z}{dt^2} + \left(\dfrac{d \log z}{dt}\right)^2 = \\ \quad = \dfrac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2} - \dfrac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\lambda + \dfrac{d \log \vartheta(t - t_1)}{dt} - \dfrac{d \log \vartheta(t - i\omega')}{dt}\right)^2. \end{cases} \tag{27}$$

Dieselbe wird nur an den Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ sowie an den äquivalenten Stellen unendlich, und zwar an den ersteren von der ersten, an den letzteren von der zweiten Ordnung. Entwickeln wir nämlich $\frac{d \log \vartheta(t)}{dt}$ nach dem Taylorschen Lehrsatze bei $t = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{d \log \vartheta(t)}{dt} = \frac{1}{t} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)} t + \cdots, \tag{28}$$

also

$$\frac{d^2 \log \vartheta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)} + \cdots. \tag{28'}$$

Mithin lautet die Entwickelung unseres obigen Ausdrucks an den Stellen $t = t_1$ bez. $t = i\omega'$, wenn wir nur die unendlich werdenden Terme hinschreiben:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{t - t_1}\left(\lambda - \frac{d \log \vartheta(t_1 - i\omega')}{dt_1}\right) + \cdots \text{ (für } t = t_1),$$

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \frac{2}{t - i\omega'}\left(\lambda + \frac{d \log \vartheta(i\omega' - t_1)}{dt_1}\right) + \cdots \text{ (für } t = i\omega').$$

Wir können nun durch Wahl von λ die Unendlichkeitsstelle bei $t = t_1$ in Fortfall bringen; wir brauchen nur zu setzen

$$\lambda = \frac{d \log \vartheta (t_1 - i\omega')}{d t_1};$$

gleichzeitig verschwindet dann auch in unserer zweiten Entwickelung der Term mit $(t - i\omega')^{-1}$. Diese lautet daher jetzt:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \cdots \tag{29}$$

oder, wenn wir noch das konstante Glied der Potenzreihe mitnehmen wollen:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} - \left(\frac{d^2 \log \vartheta (t - t_1)}{d t^2}\right)_{t = i\omega'} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)} + \cdots \tag{29'}$$

Ferner sieht man es der in (27) gegebenen Darstellung sofort an, daſs $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ ist. Es werden daher die Entwickelungen (28) und (29) aufser für die Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ auch für die sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Mithin werden bei unserer Wahl von λ aufser der Stelle $t = t_1$ auch die sämtlichen mit ihr äquivalenten Stellen als Unendlichkeitsstellen in Fortfall kommen und es wird andrerseits die Gleichung (29) nicht nur an der Stelle $t = i\omega'$, sondern auch an den sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Somit haben wir bewiesen:

Bei unserer Wahl von λ ist $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von t, welche an den Stellen $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen und nur an diesen von der zweiten Ordnung mit dem Multiplikator 2 unendlich wird.

Eine ebensolche Funktion ist aber nach obigem

$$\frac{2P}{M} u(t).$$

Die Differenz beider wäre also eine doppeltperiodische Funktion, welche für keinen Punkt der t-Ebene unendlich wird. Eine solche Funktion reduziert sich aber notwendiger Weise auf eine Konstante c. Wir haben also:

$$\frac{z''}{z} - \frac{2P}{M} u(t) = c. \tag{30}$$

Dies ist direkt eine Lamésche Gleichung. Wir sehen mithin:

Bei der obigen Wahl von λ genügt unsere elliptische Funktion ersten Grades $z(t)$ der Hermite-Laméschen Gleichung

$$z'' = \left(\frac{2P}{M} u(t) + c\right) z. \tag{30'}$$

Die in dieser Gleichung vorkommende Gröfse c hängt dabei von der noch disponibeln Konstanten t_1 ab. Durch passende Wahl dieser Konstanten wird es daher möglich sein, der Konstanten c einen beliebigen Wert zu erteilen, und es insbesondere so einzurichten, dafs die vorstehende Gleichung direkt in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht.

Um dieses zu erreichen, drücken wir zunächst die Gröfse c in einer für das Folgende bequemen Weise durch t_1 aus. Wir setzen zu dem Zwecke in (30) $t = i\omega'$ und schreiben:

$$c = \left\{\frac{z''}{z} - \frac{3P}{M}u(t) + \frac{P}{M}u(t)\right\}_{t=i\omega'}. \tag{31}$$

Darauf betrachten wir den Ausdruck:

$$\frac{P}{M}u(t) + \frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2};$$

derselbe ist eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden 2ω und $2i\omega'$, welche an keiner Stelle der t-Ebene unendlich wird. In der That heben sich die bei $t = i\omega'$ und den äquivalenten Punkten gelegenen Unendlichkeitsstellen des ersten und zweiten Termes nach den Gleichungen (24) und (28′) gerade auf. Unser Ausdruck ist also eine Konstante, so dafs wir schreiben können:

$$\frac{P}{M}u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + c_1.$$

Den Wert von c_1 bestimmen wir auf doppelte Weise, indem wir einmal $t = ia$ und $u = -1$, das andere Mal $t = \omega - ib$ und $u = +1$ setzen. Wir erhalten so

$$c_1 = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$c_1 = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}.$$

Entsprechend ergiebt sich für $u(t)$ der doppelte Ausdruck

$$\frac{P}{M}u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$\frac{P}{M}u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}$$

Wir schreiben uns insbesondere die hieraus folgenden Entwicklungen an der Stelle $t = i\omega'$ hin, welche wir mit dem konstanten Gliede abbrechen; sie lauten nach (28′):

$$\frac{P}{M}u(t) = \frac{1}{(t-i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

bez.

$$\frac{P}{M}u(t) = \frac{1}{(t-i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}.$$

Diese Entwickelungen setzen wir rechterhand in Gleichung (31) für das dritte Glied ein. Gleichzeitig ersetzen wir das erste und zweite Glied durch die Entwickelungen (29′) und (24′). Alsdann heben sich, wie es sein mufs, die für $t = i\omega'$ unendlich werdenden Bestandteile heraus und wir bekommen:

$$(32)\quad c = -\left(\frac{d^2\log\vartheta(t-t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$(32')\quad c = -\left(\frac{d^2\log\vartheta(t-t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} - \frac{2h-P}{M}.$$

Somit haben wir für die in Gleichung (30′) eingehende Konstante c zwei verschiedene Darstellungen gewonnen. Wir benutzen sie dazu, um die Gröfse t_1 in solcher Weise zu bestimmen, dafs Gleichung (30′) in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht. Dies erreichen wir dadurch, dafs wir einmal

$$(33)\qquad t_1 = ia,$$

das andere Mal

$$(33')\qquad t_1 = \omega - ib$$

setzen, wobei nach (32) und (32′) in der That

$$c = -\frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$c = -\frac{2h-P}{M}$$

wird. *Wählen wir also die in unserer elliptischen Funktion $z(t)$ vorkommende, noch disponible Konstante t_1 so, wie in den Gleichungen* (33) *und* (33′) *angegeben, so haben wir in den so entstehenden Funktionen Partikularlösungen der beiden Gleichungen* (22) *vor uns.*

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dafs unsere Parameter α und β diesen Partikularlösungen bis auf einen konstanten Faktor gleich sind.

Zunächst werden wir den Wert von α nach dem Schema der allgemeinen Lösung (25) in der Form anzusetzen haben:

$$(34)\qquad \alpha = c_1 z(t) + c_2 z(-t).$$

Der zu α konjugierte Parameter δ lautet dann, da wegen der besonderen Form von $z(t)$ unsere Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ konjugiert-imaginäre Gröfsen sind:

$$\delta = \bar{c}_2 z(t) + \bar{c}_1 z(-t), \tag{34'}$$

unter $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ die zu c_1 und c_2 konjugierten Konstanten verstanden.

Wir werden nun sehen, dafs wir entweder c_2 (und also auch $\bar{c}_2$) oder c_1 (und also auch $\bar{c}_1$) gleich Null setzen müssen.

Wir benutzen zu dem Zwecke die aus den Definitionsgleichungen der α, β, γ, δ von pag. 21 folgenden Gleichungen:

$$\alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}. \tag{35}$$

Die erste derselben zeigt, dafs die Nullstellen von α und δ mit denen von $u+1$, d. h. mit den Stellen $t = \pm ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$ übereinstimmen. Setzen wir also $t = ia$, so mufs entweder α oder δ verschwinden. In den Gleichungen (34) haben wir daher entweder $c_2 = 0$ oder $\bar{c}_1 = 0$ zu nehmen. Setzen wir andrerseits $t = -ia$, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dafs wir entweder $c_1 = 0$ oder $\bar{c}_2 = 0$ nehmen müssen. Wir haben also in der That die beiden oben bezeichneten Möglichkeiten, entweder c_1 oder c_2 gleich Null zu setzen. Ob wir dieses oder jenes thun wollen, macht keinen grofsen Unterschied aus. *In jedem Falle ergiebt sich, dafs unsere Parameter α und δ den partikulären Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ direkt proportional sind.*

Wählen wir z. B. $c_2 = 0$, so bekommen wir, indem wir für $z(t)$ und die darin vorkommenden Konstanten die gefundenen Ausdrücke eintragen:

$$\alpha = c_1 e^{\frac{\vartheta'(ia-i\omega')}{\vartheta(ia-i\omega')}t} \frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')},$$

$$\delta = \bar{c}_1 e^{-\frac{\vartheta'(ia-i\omega')}{\vartheta(ia-i\omega')}t} \frac{\vartheta(t+ia)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

(Hätten wir die andere Möglichkeit $c_1 = 0$ gewählt, so würden sich nur die Ausdrücke von α und δ gegenseitig ausgetauscht haben.)

Ganz ebenso findet man aus der zweiten der Gleichungen (35), wenn man das eine Mal $t = \omega - ib$, das andere Mal $t = -\omega + ib$ setzt, dafs auch β und γ direkt den multiplikativen Partikularlösungen unserer zweiten Gleichung (22) bis auf einen Faktor gleich sind. Die Ausdrücke von β und γ werden auf solche Weise:

$$\beta = c_2 e^{\frac{\vartheta'(\omega-ib-i\omega')}{\vartheta(\omega-ib-i\omega')}t} \frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')},$$

$$\gamma = \bar{c}_2 e^{-\frac{\vartheta'(\omega-ib-i\omega')}{\vartheta(\omega-ib-i\omega')}} \frac{\vartheta(t+\omega-ib)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Somit haben wir unsere früheren Werte der α, β, γ, δ (vergl. pag. 420 und 428) auf kürzestem und direktestem Wege wiedergewonnen. Es bleibt nur noch die Bestimmung der multiplizierenden Konstanten c_1 und c_2 übrig, welche sich genau auf die pag. 425 und 426 angegebene Weise bewerkstelligen läfst. Wir brauchen hierauf nicht nochmals einzugehen.

Die Differentialgleichungen für die A, B, C, D, welche ebenfalls Lamésche Gleichungen und von denen für die α, β, γ, δ überhaupt nicht verschieden sind, lassen sich natürlich genau ebenso integrieren. Die Vereinfachung, welche die α, β, γ, δ gegenüber den A, B, C, D mit sich bringen, kommt erst in den Endresultaten zur Geltung, wo sich zeigt, dafs die α, β, γ, δ den multiplikativen Partikularlösungen unserer Laméschen Gleichungen direkt proportional sind, während sich die A, B, C, D aus ihnen linear zusammensetzen. —

Der Hauptzweck, den wir mit diesem Nachtrag verfolgten: zu zeigen, dafs unsere Parameter α, β, γ, δ nicht nur für die Formulierung der Schlufsresultate, sondern auch für die direkte Integration des Kreiselproblems von Nutzen sind, ist hiermit erreicht.

Wir bemerken noch, dafs das hier gegebene Integrationsverfahren genau den Intentionen Hermite's entspricht, welche dieser Autor in seinen berühmten Untersuchungen über die Anwendungen der elliptischen Funktionen (den pag. 151 citierten Applications des fonctions elliptiques) niedergelegt hat. Während aber Hermite von dem Problem des schweren Kreisels nur den Spezialfall des gewöhnlichen sphärischen Pendels behandelt, gelang es uns, dank der Einführung der α, β, γ, δ seine Methode auf die Behandlung des schweren Kugelkreisels (unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels) auszudehnen, von welchem der Übergang zu einem beliebigen symmetrischen Kreisel jederzeit nach den früheren Regeln möglich ist. Und während Hermite für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des gewöhnlichen sphärischen Pendels bez. für deren komplexe Verbindungen $x + iy$, $x - iy$, z elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades findet, ergeben sich für die rechtwinkligen Koordinaten A, B, C, D unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels oder vielmehr für deren komplexe Verbindungen α, β, γ, δ elliptische Funktionen ersten Grades, so dafs also die Hermiteschen Resultate selbst durch das Vorstehende eine Vereinfachung erfahren. Um die vollständige Parallelität der Hermiteschen und der hier gegebenen Entwickelungen zu würdigen, vergleiche man insbesondere pag. 109 u. ff. des genannten Werkes.

Gleichzeitig werden wir durch die vorstehenden Betrachtungen noch einem anderen in der Litteratur bereits vorliegenden Ansatze gerecht.

Herr Tait stellt sich nämlich in der pag. 142 citierten Arbeit die Aufgabe, allgemein die Rotationsprobleme auf Grund der Quaternionentheorie zu behandeln. Besonders elegant sind seine Resultate im kinematischen Teile; aber auch im kinetischen Teile finden sich bemerkenswerte Ansätze, welche enge mit unsern letzten Betrachtungen zusammenhängen. Dabei faſst Tait unsere vier Quaternionenparameter A, B, C, D, wie es in der Quaternionentheorie üblich ist, in die eine komplexe Gröſse

$$q = iA + jB + kC + D$$

zusammen und bildet die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher diese Gröſse genügt (vgl. insbesondere Art. 30 der genannten Arbeit), und zwar sogleich für den allgemeinsten Fall einer beliebigen unsymmetrischen Massenverteilung und eines beliebigen äuſseren Kraftsystems. Indessen gelingt es ihm nicht, von dieser Differentialgleichung aus zu einer allgemeinen Integration vorzudringen, vielmehr erklärt er diese Aufgabe, wie es bei der angestrebten Allgemeinheit kaum anders möglich ist, für „unentwirrbar kompliziert“.

Unsere obigen Betrachtungen zeigen nun, daſs in dem allerdings ganz speziellen Fall des schweren Kugelkreisels die Differentialgleichung für die Quaternion q oder, was auf dasselbe hinauskommt, die vier Differentialgleichungen für die Quaternionenkomponenten A, B, C, D eine äuſserst einfache Gestalt annehmen und ein sehr elegantes Integrationsverfahren zulassen. Gleichzeitig erkennen wir aber, daſs es für die analytische Durchführung der Integration praktisch ist, von den Quaternionengröſsen A, B, C, D wieder zu unseren Parametern α, β, γ, δ überzugehen, welche in analytischer Hinsicht von unübertrefflicher Einfachheit sind. Jedenfalls werden wir hiernach unser vorliegendes Integrationsverfahren als spezielle Durchführung des den Vertretern der Quaternionentheorie in Sachen der Rotationsprobleme vorschwebenden Ideales ansehen dürfen.

Was die Beziehung der Kreiselbewegung zur Punktmechanik betrifft, so bemerken wir, daſs die obigen Auseinandersetzungen als ein spezielles Beispiel für eine allgemeine mathematische Methode anzusehen sind, nach welcher man jedes noch so komplizierte mechanische Problem in gewissem Sinne als ein Problem der Punktmechanik auffassen kann. Man ordnet nämlich dem mechanischen System, wie oben geschehen, einen einzelnen Massenpunkt, einen „Repräsentanten“ zu, indem man die Lagenkoordinaten des Systems als Koordinaten des Repräsentanten deutet. Dabei wird man entsprechend der Anzahl der benutzten Lagenkoordinaten in einen Raum von eventuell höherer Dimensionenzahl geführt. In diesem Raume legt man ferner im Anschluſs an

den Ausdruck der lebendigen Kraft eine geeignete Bestimmung über die Messung der Entfernungen zu Grunde; man berechnet nämlich die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte oder, wie man sich kürzer ausdrückt, das Linienelement des betreffenden Raumes durch die Gleichung

$$ds^2 = 2T\,dt^2,$$

wo die rechte Seite ersichtlich eine definite quadratische Form der unendlich kleinen Koordinatendifferenzen der beiden Punkte wird, und definiert im Übrigen die Bewegung des Massenpunktes wieder durch das Bestehen der Lagrangeschen Gleichungen.

Dann entsprechen sämtliche Lagen, welche der Repräsentant bei der so definierten Bewegung einnimmt, sämtlichen Lagen, welche das ursprüngliche mechanische System nacheinander durchläuft. Die Bewegung des Repräsentanten wird ein genaues Abbild von der Bewegung des Systems.

Es ist klar, dafs die hier skizzierte mehrdimensionale Punkt-Auffassung der mechanischen Probleme im Grunde nur eine Umdeutung der ursprünglichen Fragestellung ist. Sie vermittelt keine eigentlich neue Erkenntnis, sondern gestattet nur eine in vielen Fällen bequeme Formulierung desselben Sachverhaltes.

Wie nützlich diese punktmechanische Auffassung immerhin werden kann, zeigt gerade am deutlichsten unser Beispiel des Kugelkreisels. Hier führte uns die Analogie mit dem auf einer vierdimensionalen Einheitskugel beweglichen Massenpunkte zu einer wesentlichen Vereinfachung des Integrationsverfahrens und gestattete uns, die von früher her bekannten Integralsätze der Kreiselbewegung in neuer und sehr anschaulicher Weise aufzufassen und auszusprechen.

So einfach wie im vorliegenden Falle wird die punktmechanische Deutung im Allgemeinen allerdings nicht ausfallen. Man mufs nämlich, wie bereits angegeben, in dem Raume, in welchem die Bewegung des Repräsentanten verfolgt werden soll, allgemein zu reden, eine von der gewöhnlichen abweichende Bestimmung über das Mafs der Entfernungen zu Grunde legen und mufs dementsprechend eine kompliziertere und willkürliche Art von Geometrie und Mechanik postulieren. Demgegenüber besteht das Bemerkenswerte an unseren obigen Ausführungen gerade darin, dafs wir hier mit der elementaren Euklidischen Geometrie auskommen, indem wir alle Eigenschaften des realen dreidimensionalen Raumes direkt auf den vierdimensionalen Raum unseres Repräsentanten übertragen.

Den Mathematikern ist die in Rede stehende mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme seit den wichtigen Arbeiten

von Beltrami*) aus dem Jahre 1869 und von Lipschitz**) aus dem Jahre 1872 geläufig. In weiteren Kreisen dürfte sie aber erst durch das schöne Werk von Hertz über die Prinzipien der Mechanik vom Jahre 1894 Eingang gefunden haben, welches ganz und gar auf diesen mehrdimensionalen, punktmechanischen Vorstellungen beruht. —

Wir beschliefsen dieses Kapitel, indem wir die historischen Notizen von pag. 429 und 430 durch einige neue und sehr interessante Angaben vervollständigen.

Als der Druck dieses Heftes in der Hauptsache bereits beendet war, wurden wir von Herrn O. Bolza-Chicago darauf aufmerksam gemacht, dafs Weierstrass bereits im Jahre 1879 bei Gelegenheit einer Vorlesung *über die Anwendungen der elliptischen Funktionen* unsere α, β, γ, δ zur Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels verwertet hat. Eine Ausarbeitung dieser Vorlesung ist uns von Herrn J. Hänlein-Berlin in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt. Beiden Herren möchten wir an dieser Stelle unsern besten Dank aussprechen.

Weierstrass betont in jener Vorlesung zunächst, dafs die Betrachtung der neun Richtungscosinusse bei dem Problem des schweren symmetrischen Kreisels rechnerische Komplikationen mit sich bringt, welche man vermeidet, wenn man zur Festlegung der einzelnen Drehung die drei in der Anmerkung von pag. 60 genannten Eulerschen symmetrischen Drehungsparameter λ, μ, ν benutzt. Von diesen geht er mittels der Proportion $\lambda : \mu : \nu : 1 = A : B : C : D$ zu unseren vier Quaternionengröfsen über, welche durch Hinzufügung der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel festgelegt werden. Die geometrische Bedeutung der A, B, C, D wird in dem Sinne der Gleichungen (14) von pag. 38 mit Hülfe von Drehungsaxe und Drehungswinkel erläutert. Endlich bildet Weierstrass die komplexen Verbindungen $A + iB$, $C + iD$, d. h. im Wesentlichen zwei von unsern vier Parametern α, β, γ, δ und bestimmt diese als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mittels gewisser Formeln, welche sich, auf den Fall des Kugelkreisels spezialisiert, genau mit unserer Darstellung von pag. 420 und 428 decken. (Ein rein äufserlicher Unterschied besteht darin, dafs Weierstrass die σ-Funktion statt der ϑ-Function verwendet und übrigens λ, μ, ν, ϱ statt A, B, C, D schreibt.)

*) Mem. dell' Istituto di Bologna, ser. II, t. VIII, Teorica generale dei parametri differenziali.

**) Crelles Journal Bd. 74, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

Dagegen fehlt bei Weierstrass (abgesehen von den Ausführungen des letzten Paragraphen) die Beziehung der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu der komplexen Variabeln, welche wir uns auf der Riemannschen Kugelfläche ausgebreitet dachten, und die Gleichung für die lineare Transformation dieser Variabeln bei Ausführung der Drehung $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}.$$

Was nun speziell diesen letzteren Punkt betrifft, so sind wir inzwischen in der Lage, einen noch viel älteren und noch viel interessanteren historischen Nachweis beizubringen. Bei der kürzlich erfolgten Durchsicht des Gaufsischen Nachlasses hat sich nämlich gezeigt, dafs diese ganze Vorstellungsweise bereits Gaufs vollständig geläufig war, und ferner, dafs die Grundlagen der Quaternionentheorie explicite in den gelegentlichen Aufzeichnungen von Gaufs enthalten sind. Wir citieren zu diesem überraschenden Ergebnis einige Sätze aus einer vorläufigen Mitteilung „Über den Stand der Herausgabe von Gaufs' Werken", Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Heft 1, 1898:

"Gaufs hat bereits genau so, wie später Riemann, eine komplexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel gedeutet und hat gewufst, dafs sich die Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt durch lineare Substitutionen dieses z von bestimmter einfacher Bauart darstellen! Und, was noch überraschender scheinen kann, er hat die „Mutationen des Raumes" (wie er sagt), d. h. die Drehungen des Raumes um den Koordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer beliebigen von letzterem auslaufenden Ähnlichkeitstransformation, bereits 1819 durch dieselben vier Parameter dargestellt, welche die spätere Quaternionentheorie benutzt; er bezeichnet den Inbegriff dieser vier Parameter als „Mutationsskala" und giebt die expliciten Formeln für die Zusammensetzung zweier Skalen (also die Multiplikation zweier Quaternionen), wobei er die symbolische Schreibweise $(a\,b\,c\,d) \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (A\,B\,C\,D)$ benutzt und ausdrücklich bemerkt, dafs es sich dabei um einen nicht kommutativen Prozefs handelt!"

Um noch einmal auf die oben genannte Weierstrassische Vorlesung zurückzukommen, so bemerken wir, dafs Weierstrass bei der Behandlung des kräftefreien Kreisels die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht verwendet. Vielmehr geht er hier auf die Jacobischen Richtungscosinus aus, die er nach vorheriger Integration der Eulerschen Gleichungen ziemlich direkt als elliptische Funktionen ersten Grades hinzuschreiben vermag. Ein kurzer Bericht über diese Methode findet sich in dem Mathematischen Wörterbuch von Hoffmann-Natani, Bd. VI, pag. 273, unter „Rotation".

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften
mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Herausgegeben im Auftrage der
Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien,
sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. Geheftet und in Halbfranz geb.

Bisher erschienen:

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
- I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] 1898—1904. Geh. *M.* 17.—, in Halbfrz. geb. *M.* 20.—
- II. Teil. [X u. S. 555—1197] 1900—1901. Geh. *M.* 19.—, in Halbfranz geb. *M.* 22.—

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von **H. Burkhardt** und **W. Wirtinger.**
- I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. *M.* 7.50; 4. [160 S.] 1900. *M.* 4.80; 5. [199 S.] 1904. *M.* 6.—; 6. [57 S.] 1906. *M.* 1.60.
- II. Teil Heft: 1. [175 S.] 1901. *M.* 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
- I. Teil. Heft: 1. [220 S.] 1907. *M.* 6.40. 2. [168 S.] 1907. *M.* 5.—
- II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80; 2. [96 S.] 1904. *M.* 2.80; 3. [199 S.] 1906. *M.* 5.60.
- III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M.* 5.40; 2/3. [256 S.] 1903. *M.* 6.80.

IV. **Mechanik**, 4 Teilbände, red. von **F. Klein** und **C. H. Müller.**
- I. Teilband (IV, 1, 1) [XVI u. 691 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 20.40, in Halbfranz geb. *M.* 24.—
- II. Teilband (IV, 1, 2) Heft: 1. [152 S.] 1904. *M.* 4.40
- III. Teilband (IV, 2, 1) [XI u. 493 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 17.60, in Halbfranz geb. *M.* 20.60.
- IV. Teilband (III, 2, 2) Heft: 1. [124 S.] 1907. *M.* 3.60. 2. [186 S.] 1907. *M.* 5.20.

V. **Physik**, 3 Teile, red. von **A. Sommerfeld.**
- I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80; 2. [159 S.] 1905. *M.* 4.80; 3. [172 S.] 1906. *M.* 5.20; 4. [121 S.] 1907. *M.* 3.60.
- II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. *M.* 8.—; 2. [104 S.] 1907. *M.* 3.—

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, 2 Teilbände, red. von **Ph. Furtwängler** und **E. Wiechert.**
Heft: 1. [116 S.] 1906. *M.* 3.40. 2. [127 S.] 1907. *M.* 3.60.

VI. 2: **Astronomie**, red. von **K. Schwarzschild.**
Heft: 1. [193 S.] 1905. *M.* 5.80. 2. [139 S.] 1908. *M.* 4.—
In Vorbereitung:

VII. **Geschichte, Philosophie, Didaktik.** [In Vorbereitung.]

Encyclopédie des sciences mathématiques
pures et appliquées.

Publiée sous les auspices des Académies des sciences
de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne
avec la collaboration de nombreux savants.

Édition française,

rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de
Jules Molk, professeur à l'université de Nancy.

En sept tomes. gr. 8. Geheftet.

Paru: Tome I: **vol. I, fasc. I.** [160 pag.] 1904. *M.* 4.— **fasc. II.** [167 pag.] 1907. *M.* 4.20. **fasc. III.** [158 S.] 1908. *M.* 5.— Tome I: **vol. II, fasc. I.** [237 pag.] 1907. *M.* 6.80. Tome I: **vol. III, fasc. I.** [96 pag.] 1906. *M.* 2.40. **fasc. II.** [96 pag.] 1908. *M.* 2.40. Tome I: **vol. IV, fasc. I.** [160 pag.] 1906. *M.* 4.—

Durch die günstige Aufnahme veranlaßt, welche die deutsche Ausgabe dieses monumentalen Werkes in Fachkreisen gefunden hat, und auf vielfache Anregungen hat sich die Verlagsbuchhandlung entschlossen, die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften in Gemeinschaft mit der Firma Gauthier-Villars in Paris auch in französischer Sprache erscheinen zu lassen. Das Werk wird, wie schon die erste Lieferung zeigt, seitens der deutschen Bearbeiter viele Änderungen und Zusätze erfahren, und auch die französischen Mitarbeiter, sämtlich Autoritäten auf ihren Gebieten, haben eine gründliche Umarbeitung vorgenommen. Zum ersten Male dürfte somit wohl hier der Fall eingetreten sein, daß sich bei einem so großen Werke die ersten deutschen und französischen Fachgelehrten zu gemeinsamer Arbeit verbunden haben.

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise) von **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität Pavia. Autorisierte deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden. 2. neubearb. Auflage. In 2 Teilen. **Analysis und Geometrie.** I. Teil: Die Analysis. Herausgegeben von **P. Epstein.** [ca. 700 S.] gr. 8. 1909. In Lnwd. geb. ca. n. *M.* 12.— [Erscheint im Januar 1909.] II. Teil: Die Geometrie. Herausgegeben von **H. E. Timerding.** [ca. 800 S.] gr. 8. 1909. In Lnwd. geb. ca. n. *M.* 14.— (Erscheint Ostern 1909.]

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum" sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Von Professor Dr. **Felix Müller.** [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinw. geb. n. *M.* 20.— Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben: I. Lieferung. [IX u. 132 S.] 1900. Geh. n. *M.* 8.— II. Lieferung. [S. IX—XV u. 133—316.] 1901. Geh. n. *M.* 11.—

Das Vokabularium enthält in alphabetischer Folge mehr als 12000 Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in französischer und deutscher Sprache und soll in erster Linie eine Ergänzung der gebräuchlichen Wörterbücher für die beiden genannten Sprachen sein. In dem zweiten deutsch-französischen, Teil sind, ebenso wie im ersten, die zu einem und demselben Hauptworte gehörigen zusammengesetzten Kunstausdrücke unter diesem Hauptworte vereinigt. So sind unter dem Artikel „Kurve" 449 Kunstausdrücke zusammengestellt, in denen dieses Wort vorkommt. Jedem Adjektivum sind diejenigen Hauptwörter in Klammern beigefügt, die mit ihm zu einem Kunstausdruck verbunden werden. Da das Vokabularium zugleich als Vorarbeit zu einem Mathematischen Wörterbuche dienen soll, so sind auch zahlreiche Nominalbenennungen aufgenommen, deren Anführung aus rein sprachlichem Interesse überflüssig erscheinen dürfte. Z. B. Gaußsche Abbildung (einer Fläche auf eine Kugel) (Gauß 1827) [inf. Geom.] représentation de Gauss; Clairauts Satz (über die geodätischen Linien auf Umdrehungsflächen) (Clairaut 1733) [inf. Geom.] théorème de Clairaut. Aus den beigefügten Zusätzen ist zu ersehen, daß das Vokabularium mehr bietet, als der Titel erwarten läßt.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von **Moritz Cantor.** In 4 Bänden **I. Band.** Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. *M.* 24.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 26.— **II. Band.** Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. verb. und verm. Auflage. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M.* 26.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 28.— **III. Band.** Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. verb. und verm. Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 25.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 27.— **IV. Band.** Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren **V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti** und **C. R. Wallner** von **M. Cantor.** Mit 100 Figuren im Text. [VI u. 1113 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M.* 32.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 35.—

„Einen hervorragenden Platz unter den neueren Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat.

Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, der an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will. . . ."

(Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen.)

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

„Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen" hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Büchmann" bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein . . . gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen. . . . Ein alphabetisches Sach- und Namenregister erleichtert die Orientierung."

(Prof. Dr. Holzmüller.)

YD 26673

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
BERKELEY

QA862
T7K6
v.1,2
cop.2

Return to desk from which borrowed.
This book is DUE on the last date stamped below.

ASTRONOMY LIBRARY

JAN 21 1961

DEC 6 1968

DEC 12 1979

195

gewähltem Material die wissenschaftlichen Methoden der Geometrie zur Geltung zu bringen und überall auf die Grundfragen einzugehen. Ist so die theoretische Seite, namentlich in einigen Abschnitten, stark zum Ausdruck gekommen, so ist doch auch auf die praktischen Bedürfnisse Rücksicht genommen, die freilich erst mit dem dritten Bande ihre endgültige Befriedigung finden sollen; doch ist dafür an verschiedenen Stellen, so in der Trigonometrie und in der analytischen Geometrie schon vorgearbeitet worden.... So darf der Inhalt des zweiten Bandes der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik" als ein sehr reichhaltiger bezeichnet werden, der über die Grenzen dessen, was an der Schule geboten werden kann, erheblich hinausführt, der aber auch — und das ist noch wichtiger und offenkundig der Hauptzweck des Werkes — eine Vertiefung des geometrischen Wissens vermittelt. Jüngere Lehrer der Mathematik werden das Buch gewiß oft und mit Nutzen zu Rate ziehen, namentlich wenn sie im Unterrichte zu prinzipiell wichtigen Fragen kommen, um sich über die leitenden Gedanken zu orientieren."

Eines verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: das ist die reiche Ausstattung mit schönen, sehr instruktiv gezeichneten Figuren. Der schwierigen Vorstellung der verschiedenen Formen sphärischer Dreiecke kommen die stereographischen Bilder der Euler'schen, Möbius'schen und Study'schen Dreiecke sehr zu statten." **(Zeitschrift für das Realschulwesen.)**

„... Daß ein Hochschullehrer von der Bedeutung des Verfassers die Elementar-Mathematik von höherer Warte aus behandelt und mustergültig darstellt, ist selbstverständlich. Jeder Lehrer, jeder Studierende muß das Werk, welches nicht nur in methodischer, sondern auch in systematischer Hinsicht von Bedeutung und daher eine wichtige Erscheinung der elementaren mathematischen Literatur ist, besitzen und studieren." **(Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen.)**

„... Die Encyklopädie will kein Schulbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes sein, ist aber zur Vorbereitung auf den Unterricht, namentlich in den oberen Klassen, den Lehrern der Mathematik dringend zu empfehlen, welche die bezüglichen Originalarbeiten nicht alle selbst studiert haben, sich aber doch orientieren wollen, wie vom Standpunkte der modernen Wissenschaft die Begriffsbildungen, Methoden und Entwicklungen der Elementar-Mathematik zu gestalten sind." **(C. Färber im Archiv der Mathematik und Physik.)**

LD 21–100*m*–11,'49(B7146s16)476